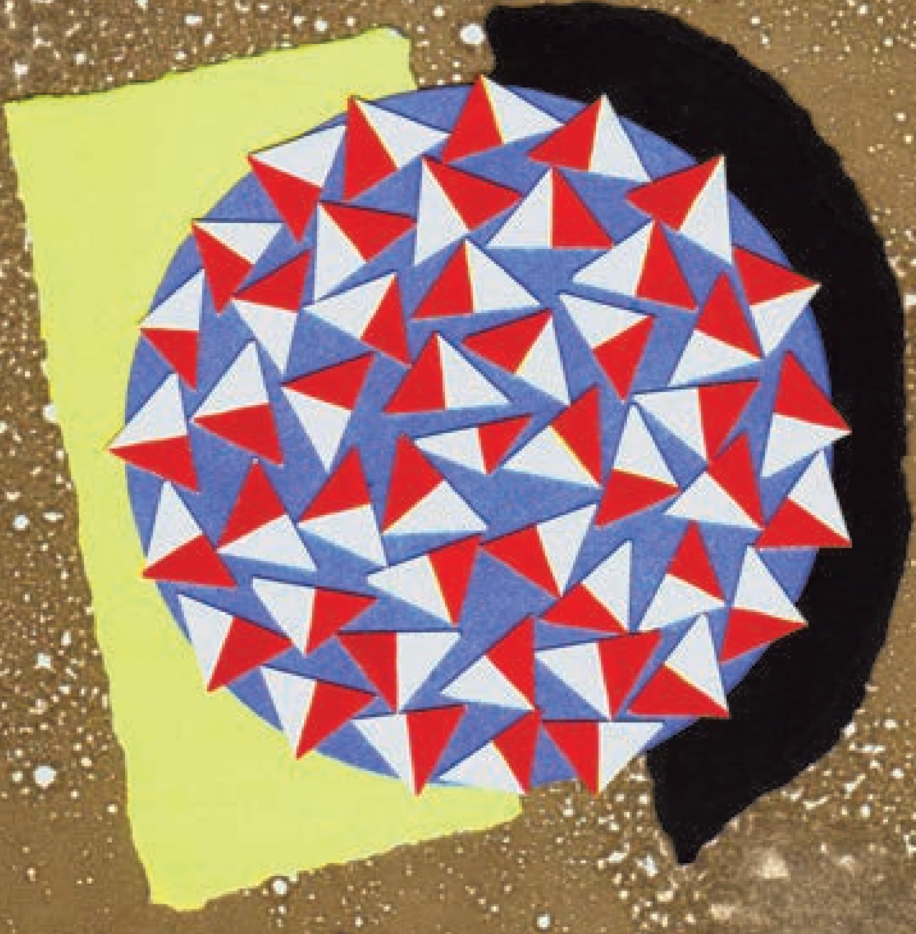
ISSN 0130-2221
МАЙ
2021 · № 5

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

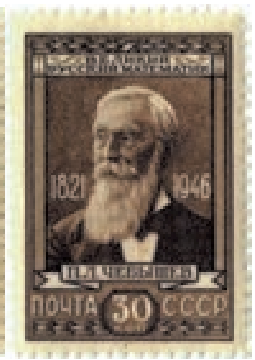


К 200-летию П.Л.ЧЕБЫШЁВА

20 мая 2021 года в почтовое обращение вышла марка, посвященная 200-летию со дня рождения математика и механика Пафнутия Львовича Чебышёва. На почтовой марке изображен портрет П.Л. Чебышёва, стопоходящая машина и формула дифференциального бинома.

Дополнительно к выпуску новой почтовой марки изданы конверты первого дня и изготовлены штемпели специального гашения для Москвы, Санкт-Петербурга и Калуги.

Это уже вторая марка, выпущенная в нашей стране в честь П.Л.Чебышёва. Первый почтовый памятный знак был приурочен к 125-летию со дня его рождения и изготовлен в 1946 году. На этой марке можно увидеть портрет Пафнутия Львовича, подпись «Великий русский математик», а также год рождения ученого и год 125-летнего юбилея.



КВАНТ

МАЙ 2021 № 5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Андрей Дмитриевич Сахаров (к 100-летию со дня рождения)

Л.БЕЛОПУХОВ

Удивительная судьба была у физика Андрея Дмитриевича Сахарова (1921–1989). Главный теоретик и конструктор создания страшного оружия – водородной бомбы, трижды Герой Социалистического Труда за руководство созданием многих видов ядерного оружия, Сахаров в 1975 году стал лауреатом Нобелевской премии мира *«за бесстрашную поддержку фундаментальных принципов мира между людьми и мужественную борьбу со злоупотреблениями властью и любыми формами подавления человеческого достоинства»*.

В день испытания первой водородной бомбы (еще в наземном варианте) 12 августа 1953 года на Семипалатинском полигоне сразу после взрыва научные руководители испытания академики И.В.Курчатов, Ю.Б.Харитон и Я.Б.Зельдович при поддержке главного руководителя испытания министра среднего машиностроения В.А.Малышева написали отзыв о Сахарове в связи с предстоящими выборами в Академию наук СССР. Отзыв был направлен в правительство и в президиум Академии. В нем, в частности, говорилось:

«Андрей Дмитриевич Сахаров является необычайно одаренным физиком-теоретиком и в то же время замечательным изобретателем. Соединение в одном лице искусства и целеустремленности изобретателя с глубиной научного анализа привели к тому, что за короткий срок, за шесть лет, А.Д. Сахаров достиг крупнейших результатов, поставивших его на первое место в Советском Союзе и во всем мире в важнейших областях физики. На протяжении последних лет и в ближайшем будущем идеи А.Д. Сахарова открывают пути важнейшей части советской физики. Избрание А.Д. Сахарова действительным членом Академии наук СССР явится лишь справедливым признанием его заслуг перед советской наукой и нашей Родиной. Молодость Сахарова, его огромная инициатива и талант позволяют с уверенностью ждать еще больших достижений».

32-летний Сахаров в это время имел всего лишь ученую степень кандидата физико-математических наук. И тем не менее, 22 октября он единогласно был избран действительным членом Академии наук. Выступивший на общем собрании Академии И.В. Курчатов сказал: *«Такие люди, как Сахаров, рождаются раз в полвека»*. Вдогонку этому избранию через месяц Высшая аттестационная комиссия присвоила Сахарову ученое звание доктора наук «за работы, проведенные в КБ-11».

Андрей Дмитриевич Сахаров родился 21 мая 1921 года в Москве в интеллигентной семье. Его отец, Дмитрий Иванович Сахаров, был известным педагогом-физиком, профессором Московского педагогического института, автором замечательных популярных книг и серьезных задачников для школ, техникумов и вузов. Мать, Екатерина Алексеевна Софиано, дочь потомственного российского военного греческого происхождения, не работала и занималась вмести с мужем воспитанием сына.

Начальное образование и воспитание Андрей Сахаров получил дома, а в школе учился только с седьмого класса. Он рос замкнутым и необщительным, однако в школе сразу стал заниматься в математическом кружке. Несмотря на то, что он

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20210501

А.Д.Сахаров во время интервью В.Губареву, март 1970 года (фотография Ю.Роста)

решал самые трудные математические задачи, он часто делал это интуитивно, без той математической строгости всех доказательств, которую так любят и считают необходимой математики. Он часто не мог объяснить, как он нашел нужное решение. Это было одной из причин, по которой он в выпускном классе из математического кружка при МГУ перешел в физический кружок и серьезно увлекся физикой. По-видимому, большую роль в этом сыграл и его отец.

Имея в свидетельстве об окончании средней школы (аттестаты зрелости ввели позже) только отличные отметки по всем предметам, в 1938 году Сахаров поступает на физический факультет Московского государственного университета и, несмотря на потерю времени при эвакуации факультета в Ашхабад, с отличием защищает дипломную работу в 1942 году. Как лучшему студенту выпуска, ему была предложена аспирантура. Но Сахаров отказывается от нее и в тяжелое военное время работает на военных заводах в Коврове и Ульяновске, таким образом осуществляя свое участие в общенародной борьбе с гитлеризмом.

На патронном заводе в Ульяновске он делает ряд ценных рационализаторских предложений, разрабатывает оригинальную схему проверки качества внутренней части бронебойных патронов (которые у немцев назывались «фауст-патронами»). Если при изготовлении этой сердцевины патрона (специальной закалке) были допущены технологические ошибки, то она имела пониженные прочностные свойства и патрон мог разорваться еще в стволе ружья. Во избежание этого смертельно опасного брака производились контрольные испытания из каждой партии изготовленных патронов. И при наличии хотя бы одного случая разрыва патрона при испытательной стрельбе уничтожалась вся партия. Отличить бракованный патрон по внешнему виду было нельзя – брак ведь таился во внутренней части этой сердцевины.

Сахаров придумал способ определения этого невидимого брака с помощью нескольких магнитных полей, через которые сердцевина проходила последовательно, скользя внутри изогнутой медной трубы. Когда сердцевина останавливалась, последнее магнитное поле показывало, есть ли брак внутри или изделие вполне качественное. Работница видела этот результат по положению стрелки на циферблате и легко могла удалить бракованное изделие. Установку отличала простота конструкции и надежность контроля. Сахаров своими не очень умелыми руками изготовил первый опытный экземпляр установки (характерный штрих – необходимую изогнутую медную трубку он нашел на заводской свалке). Но для обоснования физической сущности явления и расчетов магнитных полей требовались немалые знания магнитных и механических свойств твердых тел. Значит, они уже были у молодого выпускника физического факультета. Но, пожалуй, самое главное, что уже содержалось в этой работе Сахарова и проявилось в его будущей деятельности, – это способность глубоко проникнуть в суть физического явления и воплотить идею в конкретную установку.

Сахаров был премирован (премия в размере тогдашних 3000 рублей равнялась четырем месячным окладам). В своих «Воспоминаниях» через 40 лет он пишет, что с удивлением узнал о том, что описание его прибора вошло в учебники по технологиям военного дела, а сам прибор, собственноручно им изготовленный, находится в заводском музее.

Перед самым окончанием войны Сахаров поступил в аспирантуру Физического института Академии наук к заведующему теоретическим отделом Игорю Евгеньевичу Тамму и через два года блестяще защитил кандидатскую диссертацию по теоретической физике элементарных частиц. Во время аспирантуры Сахаров вел обязательную педагогическую работу, читая лекции по физике в Московском энергетическом институте. После защиты диссертации Сахаров получил ряд предложений о работе в секретных организациях, занимавшихся воздействием радиоактивных излучений на человека. Но он отказывался от этих предложений, хотя они и предполагали значительное улучшение его материального положения (с женой и маленькой дочерью ему приходилось жить в общежитии).

Сахаров был счастлив, работая в теоретическом отделе И.Е Тамма и занимаясь, по его выражению, «передним краем теоретической физики».

Но в июне 1948 года Сахаров был включен в небольшую группу И.Е.Тамма по созданию термоядерного оружия (водородной бомбы). В то время это была самая секретная и самая важная научно-практическая работа в стране. У Сахарова, да и у самого Тамма, уже не спрашивали согласия работать по этой тематике. И через год они стали работать в сверхсекретном КБ-11 (ныне – наукоград Саров, Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики). Вскоре он становится одним из двух Главных теоретиков этого КБ. Впоследствии именно за работы по руководству созданием термоядерного оружия А.Д. Сахаров стал трижды Героем Социалистического Труда (1953, 1956, 1962), лауреатом Ленинской и трех Государственных премий. Характерно, что, будучи Главным теоретиком проблемы, Сахаров проявил себя и как замечательный конструктор и изобретатель, что и было отмечено в отзыве о его работе, сделанном тремя академиками, научными руководителями атомной проблемы, в 1953 году после испытания первой Сахаровской конструкции водородной бомбы.

Управляемый термоядерный синтез

Но, как сказано было в обращении академиков в правительство, одновременно с напряженной работой по созданию ядерного оружия, Сахаров достиг крупнейших результатов в важнейших областях физики. Речь шла об очень в то время секретных работах по использованию энергии термоядерного синтеза не только для взрыва водородной бомбы, а и для создания термоядерного реактора и получения с его помощью электроэнергии. Идея этого реактора, сформулированная Сахаровым вместе со своим старшим коллегой И.Е.Таммом, была им досконально рассчитана до уровня инженерного воплощения. Эта идея состояла в способе создания и удержания высокотемпературной (до 150 миллионов градусов) водородной плазмы особыми магнитными полями.

Дело в том, что термоядерная реакция синтеза гелия из изотопов водорода может начаться только при температуре порядка 20 миллионов градусов – из-за необходимости преодолеть кулоновское отталкивание ядер и заставить их сблизиться почти вплотную. Только тогда начнут действовать ядерные силы притяжения и произойдет реакция синтеза с образованием альфа-частицы и нейтрона, имеющих температуру (энергию) уже много больше – сотни миллионов градусов. Именно это и происходит в звездах, где начальная температура, «спичка», достигается энергией сжатия огромной массы звезды. В водородной бомбе такой «спичкой» является цепная реакция ядерного взрыва урана (или плутония), электромагнитное излучение которого вместо звездной гравитационной энергии и сжимает водород до необходимой плотности и температуры.

Идея необходимости создать управляемую реакцию синтеза высказывалась неоднократно. В 1949 году любитель-физик Олег Лаврентьев, моряк Тихоокеанского флота, прислал письмо в Академию наук, где высказал идею создания высокотемпературного плазменного кругового шнура (тора), удерживаемого от разлета электрическим полем. В США подобная идея выдвигалась крупным физиком Э.Теллером, руководившим, как и Сахаров, теоретическими работами по водородной бомбе. Но именно Сахаров еще в 1948 году выдвинул идею об удержании плазменного шнура не электрическим полем (что оказалось невозможным), а особыми магнитными полями – они были названы им тороидальными и полоидальными. Сахаров провел расчеты формы обкладок электромагнитов для создания таких полей и возможности получения необходимой начальной температуры («спички»). Эти расчеты были, конечно, гораздо сложнее тех, которые он делал, создавая магнитный дефектоскоп в своей первой научной работе в годы войны на патронном заводе в Ульяновске.

Через несколько лет идея Сахарова об удержании плазмы особыми магнитными полями начала осуществляться и воплотилась в устройство, которое получило название «токамак» (сложная аббревиатура официального термина «тороидальная камера с магнитными катушками»). В основу работы были положены теоретические расчеты Сахарова и его конструкторские идеи о создании особых магнитных полей. Вначале эти работы, проводимые под руководством И.В.Курчатова и Л.А.Арцимовича, были совершенно секретными. Но в 1956 году Курчатов добился их рассекречивания и на международной конференции в английском ядерном центре в Харуэлле выступил с докладом об этих работах. Для всего научного мира (и не только научного) это стало сенсацией. К сожалению, Курчатов не мог упомянуть имени Сахарова – оно было очень сильно засекречено. Но во многих странах начались подобные работы. Они оказались трудными – начинавшаяся термоядерная реакция тут же прекращалась из-за возникавших неустойчивостей. Однако сегодня результатом этих работ стало осуществление грандиозного международного проекта ИТЭР – Международного термоядерного экспериментального реактора. 24 страны, и Россия в том числе, участвуют в этом проекте. Осталось подождать еще четыре года, и, по всей вероятности, на юге Франции вспыхнет маленькая рукотворная звезда. Периодически будет вспрыскиваться очередная порция водородного топлива, и в раскаленных стенах, окружающих плазменный шнур, потоки воды будут превращаться в пар высокого давления, способный вращать турбогенератор. Только этот реактор будет еще не промышленным, он не предназначен работать как электростанция, на нем будут вестись исследования. Лишь потом начнется проектирование и постройка первого в истории Земли звездного источника электроэнергии. И это будет великой победой человечества! Но в юбилейном Сахаровском году очень важно напомнить, что дорогу к этой победе проложил именно Андрей Дмитриевич Сахаров!

Загадка антиматерии

А.Д.Сахаров занимался не только термоядерным синтезом. Еще будучи Главным теоретиком ядерного центра, он вплотную занялся космологией, освоил ее достижения и сформулировал новые идеи, которые стали основополагающими для всей современной космологии.

Одна из первых его идей была связана с отсутствием во Вселенной антивещества. В существовании античастиц физики уже давно (почти 100 лет) не сомневались. В 1927 году П. Дирак на основе специальной теории относительности и квантовой механики предсказал существование антиэлектрона. В 1934 он был обнаружен экспериментально и назван, правда, не антиэлектроном, а позитроном. Позитрон имеет точно такую же массу и величину электрического заряда, что и электрон, только этот заряд – положительный, а не отрицательный. Противоположны и другие характеристики позитрона (лептонный заряд и ориентация спина). Но главное свойство античастиц – аннигиляция. При встрече позитрона с электроном оба эти объекта исчезают, зато появляются два гамма-кванта (два – согласно закону сохранения импульса).

Аннигиляция означает полное исчезновение массы (покоя) и появление вместо этого объектов с нулевой массой, обладающих энергией и импульсом. При этом точно соблюдается эйнштейновское соотношение $E = mc^2$. И появляющаяся энергия этих объектов огромна. Легко подсчитать, что аннигиляция одного грамма частиц и античастиц соответствует появлению излучения с энергией 10^{14} Дж, что в тысячу раз превосходит энергию, выделяющуюся при ядерных и термоядерных взрывах.

Теоретические предсказания и экспериментальные свидетельства существования антиматерии и явления аннигиляции очень быстро из физики проникли в широкие массы. Этому способствовали фантастические кинофильмы и фантастическая литература, широко использовавшие аннигиляцию как оружие массового поражения. Но почему-то авторы не объясняли, как хранится антивещество в оружии, почему пули и снаряды из антивещества не аннигилирует со стенками контейнера, в котором они содержатся. И как получено антивещество, авторы тоже не объясняют. А самые проницательные авторы разъясняют, что это дело далекого будущего, когда наука обязательно что-нибудь придумает. Как же обстоит дело на самом деле?

В 1955 году был экспериментально обнаружен антипротон, а потом и другие античастицы. Они рождались при столкновениях высоко энергичных частиц на ускорителях. Появилась идея создания антивещества прежде всего из антипротона с позитроном, т.е. антиводорода. И действительно, в 1995 году было получено 9 атомов антиводорода и была создана ловушка для их удержания хотя бы на короткое время. В 2010 году в лаборатории ЦЕРНа было создано уже 112 атомов антиводорода, продержавшихся в ловушке 16 минут и только потом аннигилировавших с материалом ловушки. Ловушка полностью разрушилась под действием выделившейся при аннигиляции энергии.

Было подсчитано, что антиводород – самое дорогое в мире искусственно созданное вещество (т.е. антивещество). Один его грамм обошелся бы в фантастическую сумму 10^{14} евро. Небольшое количество антипротонов сейчас производится и используется на ускорителях в ЦЕРНе. Недавно были получены спутниковые данные о наличии антипротонов в одном из радиационных поясов Земли, в ловушке, созданной земным магнитным полем. Эти антипротоны рождаются при взаимодействии очень энергичных космических частиц с ядрами элементов земной атмосферы.

Но если антивещество в принципе может существовать, то оно должно было появиться в том же количестве, что и вещество при рождении Вселенной! Но куда же оно делось? Ведь все астрономические наблюдения свидетельствуют об отсутствии в наблюдаемой Вселенной антивещества (линейчатые спектры антивещества и вещества чуть-чуть отличаются друг от друга, и это позволяет определить, веществу или антивеществу принадлежат наблюдаемые астрономами спектры).

В 1965 и 1967 годах в физическом журнале Академии наук (ЖЭТФ – журнал экспериментальной и теоретической физики) были напечатаны две работы Сахарова. Их названия: «Начальная стадия расширения Вселенной и возникновение неоднородностей вещества» и «Нарушение CP-инвариантности, C-асимметрия и барионная асимметрия Вселенной». В своих замечательных «Воспоминаниях» (увидевших свет только в 1990 году) Сахаров популярно излагает их содержание … на 18 страницах. Из заглавия второй статьи ясно, что совсем коротко изложить ее содержание невозможно. Но самое главное, что, сформулировав несколько гипотез, Сахаров доказал с их помощью барионную асимметрию Вселенной – тот факт, что родившиеся в равных пропорциях вещество и антивещество *проаннигилировали не полностью*. Остался некоторый избыток вещества (что и было названо барионной асимметрией). Вот от этого избытка и произошел весь существующий мир, включая и тех, кто сегодня интересуется этим вопросом.

К сожалению, совершенно невозможно очень кратко написать о самой существенной идее Сахарова – о нарушении CPT-симметрии. Даже в самом популярном виде это тема отдельной статьи. Но об одной из гипотез все же упомянем. Речь идет о нестабильности протона. Для выводов Сахарова о барионной асимметрии протон должен быть нестабильным со средним временем жизни 10^{50} лет. Другими словами, барионный заряд может не сохраняться. Точных экспериментальных данных факта нестабильности протона нет, уж слишком мала вероятность его превращения. Но экспериментаторы ведут упорную работу по обнаружению этого явления. Поскольку число протонов в килограмме вещества не меньше 10^{27}, существует надежда «поймать» этот процесс. Трудность в том, чтобы отличить этот процесс от множества других явлений, вызывающих срабатывание приборов-регистраторов.

Вот уже больше 25 лет в японской подземной (чтобы защититься от космического излучения) лаборатории с помощью сотен приборов ведется наблюдение за огромным водоемом (50000 тонн воды). Результат пока такой – если и есть распад протона, то среднее время его жизни больше $1{,}6 \cdot 10^{34}$ лет. Что ж, это не опровергает гипотезу Сахарова. А во многих теоретических работах принцип нестабильности протона включен в число исходных постулатов.

Космологическая стрела времени и многолистная Вселенная

Вторая группа космологических работ Сахарова относится к глобальным вопросам судьбы Вселенной во времени. В 1980-е годы одна за другой выходят работы Сахарова с такими захватывающими заголовками: «Космологические модели Вселенной с поворотом стрелы времени» (1980), «Многолистные модели Вселенной» (1982), «Космологические переходы с изменением стрелы времени» (1984).

Все эти статьи были посвящены одной глобальной теме – что такое наш мир. Одна в нем Вселенная с единственной метрикой пространства-времени или Вселенных конечное либо бесконечное число? Меняется или нет направление космологической стрелы времени (расширение – сжатие Вселенных)? Одинаковы ли во Вселенных законы природы? Сахаров выдвинул понятие Мегавселенной как совокупности различных Вселенных с разным числом измерений, разной сигнатурой (направлением стрелы времени), разными топологиями. А возможно, и с квантовой суперпозицией этих Вселенных.

Любая из работ Сахарова представляет собой строгие обоснования его гипотез и насыщена такими математическими доказательствами, в которых нелегко разобраться неспециалисту. Тем более, что многое, кажущееся ему предельно понятным, он вообще в статьях не приводит (как это было еще в школьные годы его занятий математикой). Характерно, что эта особенность Сахарова – мгновенно совершать сложные математические преобразования – проявлялась и в его деятельности по теоретическому руководству конструкторскими работами. Его коллегам запомнился случай, когда для решения одной из проблем было создано несколько групп физиков и инженеров, каждая из которых возглавлялась крупным ученым. Результаты были получены через несколько недель работы. Когда Сахаров познакомился с этой задачей, то выполнил ее за несколько минут на одном листке бумаги. При этом он был огорчен тем, что, не зная о работе других групп , он невольно «подставил» их кажущейся ему простотой решения.

Об этой необычайной особенности Сахарова академик А.Б.Мигдал сказал: «Талант попадает в цель, в которую никто попасть не может, а гений попадает в цель, которую никто не видит». А вот слова ближайшего коллеги Сахарова по работе в КБ-11 и по космологическим проблемам, тоже трижды Героя Социалистического Труда академика Я.Б.Зельдовича: «Мой мозг – это компьютер, который работает в 10 раз лучше мозга обычного человека. Мозг Сахарова невозможно классифицировать, он иначе устроен».

Работы Сахарова по многолистной Вселенной также насыщены строгой математикой, как и все его другие работы. Но в своих «Воспоминаниях» и в Нобелевской лекции он делает из этих работ методологический вывод, который получил название «антропный принцип Вселенной», – мир так

А.Д.Сахаров и А.Б.Мигдал на семинаре в ФИАНе, декабрь 1986 года (фотография Ю.Роста)

устроен и законы его таковы, что обязательно должен был появиться Разум, человек. Антропный принцип мира возник у Сахарова и потому, что он любил жизнь во всей ее непредсказуемости, многогранности, *многолистности*. За отвлеченными рассуждениями и математическими выкладками у Сахарова виделось величие жизни. Он резко возражал против расхожих циничных слов «жизнь – плесень на теле Вселенной». Его теория, как он писал, «отепляет мир, вносит в нее смысл». Вот завершение его Нобелевской лекции, прочитанной его женой в декабре 1975 года на торжественном заседании норвежского комитета по Нобелевским премиям мира (сам он не получил разрешение на выезд в Норвегию):

«В пространстве Вселенной должны существовать многие цивилизации, в том числе более «удачные», чем наша. Я защищаю такую космогоническую теорию, согласно которой развитие Вселенной повторяется в своих общих чертах бесконечное число раз. Но все это не должно умалять нашего священного стремления именно в этом мире, где мы, как вспышка во мраке, возникли на одно мгновение из черного небытия бессознательного существования материи, осуществить требования Разума и создать жизнь, достойную нас самих и смутно угадываемой нами цели».

Это и есть завещание Андрея Дмитриевича Сахарова, великого ученого и гуманиста.

Великий гуманист

Если первая половина деятельности Сахарова (1946–1964) была почти целиком отдана созданию «оборонного щита Родины», то вторая половина была совсем другой. Наряду с важнейшими научными космологическими работами она была отдана конкретной деятельности во имя целей, провозглашенных им в Нобелевской лекции. Можно только гадать о факторах, так изменивших его жизнь и судьбу.

Безусловно, к ним прежде всего относится впечатление от гигантских масштабов, которые приобрели термоядерные взрывы (вплоть до взрыва «царь-бомбы» 30 октября 1961 года с тротиловым эквивалентом 58 миллионов тонн). Испытания ядерного оружия становились уже не оборонным щитом, а средством устрашения идеологически противостоящего мира.

Моя научная деятельность сложилась так, что мне довелось в 1955 году участвовать в совещаниях, посвященных проблеме обнаружения факта проведения подземных испытаний ядерного оружия. Совещания проходили на том самом испытательном полигоне под Семипалатинском, где 22 ноября 1955 года было проведено воздушное испытание «третьей идеи» Сахарова – водородной бомбы с тротиловым эквивалентом 1,6 миллиона тонн. Это было страшное, буквально «апокалипсическое» явление – сам взрыв и его последствия (см. книгу «Физика внезапного», выпуск 116 «Библиотечки «Квант»). Мы, молодые испытатели и наши коллеги по учебе в Физтехе, конструкторы и создатели этого «чудища», официально называемого «изделие РДС–37», находились в момент взрыва на передовом наблюдательном пункте в 30 км от эпицентра взрыва. А главный создатель бомбы А.Д.Сахаров вместе с другими руководителями наблюдал взрыв в 60 км от эпицентра, на окраине военно-научного городка на берегу Иртыша (ныне город Курчатов). Огромная сила взрыва и его разрушительное действие заставили Сахарова серьезно задуматься над экологической опасностью воздушных ядерных бомб. Что стало беспокоить их создателя?

При воздушных ядерных испытаниях рождавшиеся в огромном количестве нейтроны превращали в радиоактивные изотопы многие элементы атмосферы и почвы. Главную экологическую опасность представлял радиоактивный изотоп углерода ^{14}C. В составе углекислого газа он распространялся по всему миру, и защиты от него не было. И Сахаров со всей своей силой аналитического ума подсчитал вероятностное действие этого изотопа на человечество. К этому времени радиобиологическая медицина накопила обширную статистику по лучевой болезни и ее влиянии на организм. Обработка этих статистических данных привела Сахарова в ужас. Он вычислил, что в результате воздушных испытаний ядерного оружия средняя продолжительность человеческой жизни на Земле сократится на несколько лет, не говоря уже о страданиях заболевших людей (прежде всего увеличится число онкологических заболеваний). Эти научные результаты Сахаров не только довел до сведения руководителей страны, но и опубликовал в научных журналах. Вот выдержка из его статьи 1958 года, имевшей заголовок «Радиоактивный углерод ядерных взрывов и непороговые биологические эффекты»:

«Генетические эффекты в клетках облученных людей, вплоть до неизлечимых болезней, обязательно проявятся даже у самых отдаленных потомков, до нескольких десятков поколений. ... Специфика в моральном аспекте данной проблемы – это полная безнаказанность преступления (ядерных воздушных испытаний), поскольку в каждом конкретном случае гибели или болезни человека нельзя доказать, что причина лежит в радиации. ... Мы, каждый из нас, должны исходить из моральных критериев. ... Нравственный критерий категорически диктует нам – не убий».

В 1963 году призыв Сахарова, подхваченный многими прогрессивными деятелями культуры, привел к победе. Было заключено международное соглашение о полном запрещении ядерных испытаний в трех средах – в атмосфере, в воде и в космосе. Остались подземные испытания. Но они были более дорогими и не всегда давали нужные результаты. Окончательная победа идеи Сахарова произошла только в 1988 году, когда было заключено соглашение о полном запрещении любых ядерных испытаний и началось медленное планомерное уничтожение накопленных за 40 лет гигантских арсеналов США и СССР.

А тогда, в далеком 1955 году, у Сахарова еще не было сомнений в необходимости для страны той работы, которой он занимался в КБ-11. Да не только для страны, а пожалуй, и для всего человечества. Ядерный паритет двух стран, владеющих этим оружием, казался тогда спасением человечества от уничтожения в войне с использованием водородных бомб. Точно так же считали и все (в том числе и мы, молодые ученые), кто был вовлечен в орбиту создания и испытаний ядерного оружия. Возможно, так это и было на самом деле.

Сахарова тогда заботило перенесение испытаний под землю, с минимальной экологической опасностью. А основная работа нашей маленькой группы заключалась именно в исследовании подземных взрывов, в том числе и для их промышленного использования. А в воздушных испытаниях ядерного оружия мы принимали участие как специалисты по взрывам и по ударным волнам. Даже на ядерном полигоне мы не прекращали своей научной работы, используя обычные взрывчатые вещества и возможности военной организации проводить крупные подземные взрывы обычного взрывчатого вещества. Сахаров был очень заинтересован вопросом: можно ли по проявлениям подземного взрыва на поверхности земли, прежде всего по сейсмической волне, определить энергию взрыва («мощность» бомбы)? И возможно ли контролировать проведения каким-либо государством подземных ядерных испытаний?

Я хорошо помню наше впечатление от знакомства И.В.Курчатова и А.Д.Сахарова с нашими научными достижениями. Тесное научное общение с И.В.Курчатовым подтверждало то восторженное мнение о нем как о замечательной личности, которое мы знали от всех, кто с ним общался. Он хорошо разобрался в том, что мы рассказали, хотя это была совершенно незнакомая ему область науки. А все для нас интересное, что мы от него услышали о нашей работе, он оформлял так, как будто мы и без него об этом знали и до всего сами догадались. Он не стеснялся говорить, что чего-то не понял, относя это только к своей непонятливости, а не к нашему неумению прояснить дело. И он говорил, как мы уже много сделали нужного для решения задач, связанных с подземными испытаниями. Такое отношение к нам и к нашей работе буквально окрыляло. Тем более, что оно сопровождалось открытостью и юмором.

По-другому шло общение с Сахаровым. Мы чувствовали, что он в научном смысле «сильнее» Курчатова, он почти мгновенно разбирался в совершенно новой для него области. Но оставалась некоторая чопорность и отстраненность в его общении, сопровождающаяся, впрочем, безукоризненной вежливостью и уважением к нам. В своих «Воспоминаниях» он и сам пишет о своей затрудненности в общении с другими людьми. Но сейчас я думаю, что основной причиной разного нашего впечатления от общения с Курчатовым и с Сахаровым был тот факт, что как раз в это время Андрей Дмитриевич Сахаров всерьез задумался о ядерных испытаниях и о своей роли в создании термоядерного оружия.

После испытания «царь-бомбы» в 1961 году началось медленное «отравление» Сахарова, жившего до этого «в башне из слоновой кости», размышлениями о политической обстановке в мире и о роли нашей страны в мировой истории. В 1968 году Сахаров выступил со своим знаменитым письмом руководителям правительств всех стран, в том числе и руководству СССР. В своем письме он выдвинул три важнейшие политические задачи.

Первое – прекращение гонки вооружений и постепенное уничтожение запасов ядерного оружия.

Второе – окончательная ликвидация (в СССР) последствий культа личности, признание преступной и требующей покаяния деятельности партийного и государственного руководства страной до 1953 года и предоставление реальной свободы и политических прав каждому гражданину страны.

Третье – борьба с угрозой всемирного голода, который, по мнению многих футурологов тех лет, грозил человечеству.

Сегодня ясно, что первое и третье предложения Сахарова большинством стран приняты к осуществлению. Письмо получило всемирную известность. В нашей стране оно не было опубликовано, но широко распространилось в так называемом «самиздате». Естественно, что оно вызвало гнев руководства страны, поскольку не только не совпадало с официальной идеологией того времени, но и выдвигало идею конвергенции – сближения капиталистического и социалистического миров и требование гласности и прав каждого человека. Сахаров был отстранен от секретных работ, уволен с должности Главного теоретика КБ-11 и других административных должностей и определен на самую низшую возможную для академика должность – старшего научного сотрудника теоретического отдела Физического института Академии наук.

После этого Сахаров сосредоточился на деятельности в области защиты прав конкретных людей, чьи политические взгляды не совпадали с официальной доктриной. Она хорошо освещена не только в его собственных «Воспоминаниях», но и в многочисленных статьях и книгах о том времени. Эта деятельность заключалась в попытках присутствия и выступления на заседаниях судов, где выносились несправедливые приговоры, материальной и моральной помощи осужденным и их семьям, привлечении мировой общественности к каждому случаю осуждения. Гуманистическая деятельность Сахарова была награждена Нобелевской премией мира в 1975 году. А публикация через несколько лет цикла научных статей о Вселенной принесла ему мировую известность как выдающемуся физику, и он стал членом академий наук многих стран.

С горечью приходится вспоминать о периоде 1980–1986 годов в жизни Сахарова. 12 декабря 1979 года было принято решение Политбюро ЦК КПСС о вводе войск в Афганистан. Началась затяжная афганская война. На специальном заседании Организации Объединенных Наций действия СССР были осуждены, как неправомерные, подавляющим большинством государств (104 против 18). Сахаров, на основании обширной информации о политической обстановке в Афганистане и о начале военных действий, выступил в интервью перед представителями западной прессы с осуждением действий советского правительства. Реакция правительства была незамедлительной. По Указу Президиума Верховного Совета СССР от 8 января 1980 года Сахаров был лишен всех правительственных наград. Не удалось только лишить его звания академика, хотя и была развернута в прессе грандиозная травля Сахарова, требовавшая и этого наказания. Президент Академии наук М.В.Келдыш не решился созвать необходимое для этой цели общее собрание академии. История сохранила его предварительный разговор с самым авторитетным советским физиком, Нобелевским лауреатом П.Л.Капицей, в котором Капица напомнил Келдышу: «в 1933 году Гитлер исключил А.Эйнштейна из Прусской академии наук…» 22 января 1980 года Сахаров по дороге на работу был задержан и без всякого официального приговора суда был выслан (вместе с женой) в город Горький, куда был невозможен въезд иностранных корреспондентов.

Навещать Сахарова в его ссылке решались тогда очень немногие. Несмотря на то, что Сахаров получил свободное для научной работы время (и с пользой его использовал), горьковская ссылка ему дорого обошлась. Три раза он вынужден был протестовать против притеснения и ограничения прав близких ему людей. Свой протест он мог выражать единственным способом – объявлением и осуществлением голодовок. Сами голодовки и мучительные операции искусственного кормления серьезно подорвали его здоровье. В общей сложности он провел в больницах почти год.

В течение всей горьковской ссылки во многих странах мира шла кампания в его защиту. В Вашингтоне площадь в нескольких минутах ходьбы от Белого Дома, на которой находилось советским посольство, назвали Площадью Сахарова.

Народный депутат

11 марта 1985 года Генеральным секретарем ЦК КПСС стал М.С.Горбачев. Началась эпоха «перестройки». 22 октября 1986 года в период временного улучшения здоровья после тяжелого больничного периода Сахаров письменно обращается к Горбачеву с просьбой прекратить его депортацию и ссылку его жены, поскольку ее сердечное нездоровье становится угрожающим. Он обещает прекратить свою общественную деятельность, с оговоркой «кроме исключительных случаев».

15 декабря в квартире был установлен телефон, а 16 декабря раздался звонок Горбачева, извинившегося за все ранее происшедшее и сообщившего об отмене указа о лишении Сахарова государственных наград и решения о ссылке. Утром 22 декабря в Москву прибывали три поезда из Горького. И уже с раннего утра тысячи человек заполнили горьковский «причал» на Курском вокзале, не зная даже точного времени прибытия нужного поезда. Можно считать, что именно с этих декабрьских дней началась новая эпоха нашей страны, эпоха преобразований, которая, как и все эпохи перемен, никогда не бывает простой и короткой.

Сахаров, теперь уже главный научный сотрудник, с головой окунается в участие в научных семинарах и в общественную жизнь. Он отказался получить обратно знаки и удостоверения всех своих государственных наград, которых он был лишен в 1980 году, «до того времени, когда в стране не будет ни одного осужденного по политическим мотивам за инакомыслие». В 1988 году ему предоставили возможность выезда за границу. Он встречается с президентом и вице-президентом США

А.Д.Сахаров на семинаре в ФИАНе, декабрь 1986 года (фотография Ю.Роста)

Р.Рейганом и Д.Бушем, президентом Франции Ф.Миттераном, премьер-министром Великобритании М.Тэтчер. Эти государственные деятели считали за честь личное знакомство с А.Сахаровым.

В марте 1989 года Сахаров избран народным депутатом СССР от Академии наук. Это выдвижение поддержали своими подписями больше ста тысяч человек. Первый съезд народных депутатов СССР происходил в мае-июне 1989 года в Кремлевском дворце съездов. И 2 июня разыгралась страшная сцена, когда с трибуны съезда один за другим выступили 7 депутатов с гнусной травлей Сахарова за его интервью канадской газете, в котором Сахаров заявил о трагической судьбе группы советских военнослужащих в Афганистане, когда их, окруженных противником, расстреливали советские вертолеты, чтобы они не могли сдаться в плен. Сахарова обвинили в унижении чести и достоинства воинов «ограниченного интернационального контингента», как вот уже десять лет войны было принято в СССР называть советские войска в Афганистане. Партийно-агрессивное большинство депутатов криком и свистом заглушили попытку Сахарова сказать слова о вообще недопустимости афганской войны. Причем эта позорная сцена напрямую транслировалась по радио и телевидению. Сгорбленный, буквально раздавленный унижением, Сахаров уходил из зала.

На съезде была небольшая региональная группа, по поручению которой Сахаров стал готовить проект Конституции (еще не России, а СССР). В ее основе лежали реальные права личности и право всех народов на государственное самоопределение. Этот проект был опубликован лишь в одной вильнюсской газете. В этой конституции и намека не было на ту жесткую президентскую вертикаль власти, которую установила через несколько лет принятая на народном голосовании 12 декабря 1993 года действующая Конституция Российской Федерации. Но до этого времени Сахаров не дожил. 14 декабря 1989 года он выступил на заседании межрегиональной группы, а через несколько часов у него не выдержало сердце. Партийно-агрессивное властное большинство убило его – так считали его друзья и сторонники.

Похороны Сахарова стали событием, которое показало, что сам народ в Москве уже не был послушно-агрессивным большинством. Властям не удалось воспротивиться народному волеизъявлению – в последний путь Сахарова провожали сотни тысяч людей. В полном составе были Академия наук и руководство ее научных учреждений. Но не было представителей партийного руководства и правительства страны. Сахарова не стали хоронить по-правительственному пышно на Новодевичьем кладбище. Он похоронен на Востряковском кладбище, где и сейчас, через тридцать с лишним лет, на аллеях есть указатели «К могиле А.Д.Сахарова» и на могиле всегда есть живые цветы.

Улицы, проспекты, бульвары и площади названы именем Сахарова в 60 городах России и 14 городах других стран.

И с каждым годом становится все яснее величие этого человека – великого физика и великого гуманиста!

О распределении пар взаимно простых чисел

А.РЯБЧЕНКО

Задача из XIX столетия

В 1989 году в журнале «Квант» вышла статья Н.Я.Виленкина «В таинственном мире бесконечных рядов» [1]. В этой статье он рассказал о том, «как можно и как нельзя обращаться с бесконечными рядами». Один из наиболее известных рядов задает *дзета-функцию Римана*:

$$\zeta(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}.$$

В качестве примера применения дзета-функции в статье Виленкина была разобрана известная вероятностная задача, о которой задумывались многие великие математики XIX века, такие как П.Дирихле, Л.Гегенбауэр, П.Л.Чебышёв и Э.Чезаро.

Задача. *Какова вероятность того, что наудачу взятая дробь несократима?*

Обозначим через $f(N)$ количество несократимых дробей, числитель и знаменатель которых не превосходят N. В статье Виленкина показано, как найти $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{f(N)}{N^2}$. Это предел, к которому стремится доля несократимых дробей, когда правая граница отрезка $[1;N]$, из которого берутся числители и знаменатели, стремится к бесконечности. Оказывается, верно следующее:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{f(N)}{N^2}=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots=$$

$$=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2}.$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20210502

Рассуждая нестрого, найти значение предела можно так. Так как и числитель, и знаменатель «взяты наудачу», вероятность того, что хотя бы один из них не делится на i-е простое число p_i, равна $1-\frac{1}{p_i^2}$. Если перемножить эти вероятности по всем простым числам, то после нескольких преобразований получится ответ $\frac{6}{\pi^2}\approx 0,60793$.

Для школьника, уже изучившего основную теорему арифметики, но еще не очень хорошо знакомого с понятием бесконечности в математике, такой ответ может показаться неубедительным. Ведь известно, что на каждую пару взаимно простых чисел $(a;b)$ приходится бесконечное множество пар вида $(n\cdot a; n\cdot b)$, где $n\ge 2$. А каждой паре $(n;m)$ с общим делителем $d\ge 2$ соответствует единственная пара взаимно простых $(n/d\,;\,m/d)$ с тем же отношением элементов. Исходя из этих фактов, должно было бы получиться, что для «по-настоящему случайных» пар чисел вероятность взаимной простоты (т.е. несократимости соответствующей дроби) равна нулю.

Однако так рассуждать по отношению к свойствам бесконечности неправильно. Приведенный выше ход мыслей использует несуществующую функцию равномерного распределения на множестве натуральных чисел. Иначе говоря, делается предположение, что взятое наудачу натуральное число может принимать любое, сколь угодно большое, значение с одинаковой вероятностью. Но тогда сумма вероятностей окажется равной ∞, а не 1.

Иными словами, неясно, что именно означает фраза «наудачу взятая дробь» в условии задачи. Чтобы это понятие случайности было определено корректно, Виленкин в своей статье приводит решение задачи для конечного отрезка, а потом устремляет его длину к бесконечности. Для практических целей такой подход вполне допустим, ведь в очень многих ситуациях можно считать, что случайные числа берутся из очень большого, но тем не менее конечного отрезка.

Функция Эйлера и случайные числа

Итак, при стремлении длины отрезка $[1;\, N]$ к бесконечности вероятность того, что два случайных числа из него взаимно просты, стремится к $\frac{6}{\pi^2}$ (примерно 60,8%). Это знание может помочь в обосновании некоторых пределов, содержащих известную функцию Эйлера.

Определение. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ – функция от натурального n, принимающая значение количества натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним.

Верна следующая формула для φ:

$$\varphi\left(p_{\alpha_1}^{x_1} p_{\alpha_2}^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_k}^{x_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}^{x_i}\left(1 - \frac{1}{p_{\alpha_i}}\right),$$

где все α_i различны. Из этой формулы следует, что отношение $\varphi(n)/n$ бывает сколь угодно близким как к единице, так и к нулю. Действительно, для простого n имеем $\varphi(n) = n - 1$. Значит, при больших простых n отношение $\varphi(n)/n$ близко к единице. С другой стороны, верен следующий факт: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m, что выполнено неравенство $\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) < \varepsilon$. Поэтому отношение $\varphi(n)/n$ может быть и сколь угодно малым. Это старый результат, но читатели могли видеть его упоминание в недавней статье В.Брагина [2]. Кроме того, в 1954 году польские математики А.Шинцель и В.Серпинский доказали (см. книгу Рибенбойма [3]), что множество значений, которые принимает функция $\varphi(n)/n$, плотно на $[0;\, 1]$.

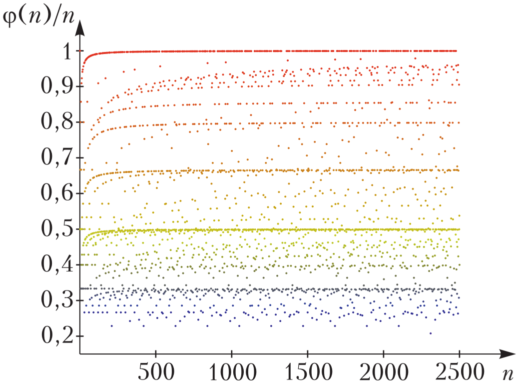


Рис. 1. Значения $\varphi(n)/n$ для n от 1 до 2500

На графике $\varphi(n)/n$ (рис.1) можно выделить несколько покрытых одноцветными точками линий, асимптотами к которым являются прямые $y = 1$ (красные), $y = 1/2$ (желтые), $y = 2/3$ (оранжевые) и т. д. Это явление объясняется тем, что большое простое число p своим множителем $(1 - 1/p)$ вносит маленький относительный вклад в значение $\varphi(n)/n$. Таким образом, произведения достаточно больших простых чисел, домноженные на 1, будут давать значения $\varphi(n)/n$, близкие к 1, домноженные на 2^k – к $1/2$, на 3^k – к $2/3$, на $2^k 3^m$ – к $1/3$ и т.д.

Несмотря на ясно наблюдаемую расходимость значений функции $\varphi(n)/n$ при $n \to \infty$, для функции $g(N) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n)$ последовательность $\frac{g(N)}{N^2}$ имеет ненулевой предел.

Теорема. *Выполняется соотношение*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{g(N)}{N^2} = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{N^2} = \frac{3}{\pi^2} \approx 0{,}30396.$$

Почему же $g(N)$ и $f(N)$ относятся в пропорции 1 к 2 при $N \to \infty$? Следующая визуализация позволяет эффектно ответить на этот вопрос.

Рассмотрим клетчатую плоскость, на которой отмечены все точки со взаимно простыми координатами (рис. 2). Ясно, что данная конструкция симметрична относительно прямой $x = y$. Кроме того, по определению верен тот факт, что на отрез-

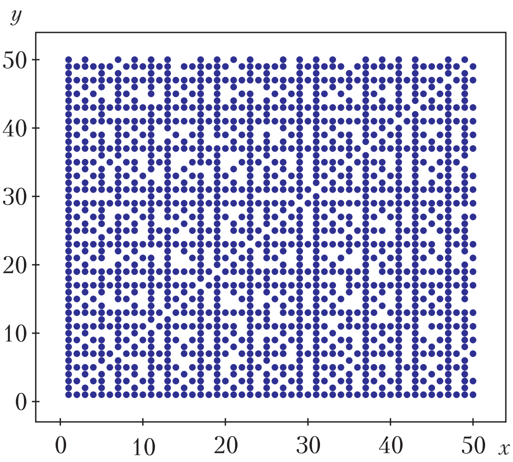


Рис. 2

ке, соединяющем точки $(n;\,1)$ и $(n;\,n)$, выбрано ровно $\varphi(n)$ точек. Таким образом, в квадрате $[1;\,N]\times[1;\,N]$ ниже прямой $x = y$ лежит $\sum_{n=2}^{N}\varphi(n) = g(N)-1$ отмеченных точек, выше — столько же, и еще необходимо учесть точку $(1;\,1)$.

Итого, в квадрате $[1;\,N]\times[1;\,N]$ лежит ровно $2\cdot g(N)-1 = 2\cdot\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)-1$ точек, соответствующих несократимым дробям. Зная это, найти значение упомянутого ранее предела уже не представляет труда.

Доказательство теоремы. Искомый предел вычисляется следующим образом:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{g(N)}{N^2} = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)}{N^2} = \lim_{N\to\infty}\frac{1+f(N)}{2N^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{f(N)}{N^2} = \frac{3}{\pi^2}.$$

Теорема доказана.

Стоит упомянуть, что имеет место более сильное утверждение, доказательство которого значительно сложнее и требует некоторых знаний математического анализа (это доказательство изложено в книге [4]):

$$\sum_{n=1}^{N}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}N^2 + O(N\log N).$$

Запись $O(N\log N)$ означает некоторую функцию от $h(N)$ такую, что $h(N) < C\cdot N\log N$ для некоторой константы C при всех достаточно больших N.

Задачи

Здесь читатель найдет несколько задач по теме этой статьи, но в то же время не стоит думать, что все необходимое для их решения было упомянуто на предыдущих страницах. В любом случае, автор надеется, что тот, кто найдет в себе силы не только определить ответ, но и продумать полные решения этих задач, получит неподдельное эстетическое удовольствие.

Слова «случайный» и «взятый наудачу» в формулировках задач следует воспринимать как «взятый равновероятно из большого, но конечного отрезка», и задачи нужно решать, устремив его длину к бесконечности.

1. Найдите вероятность того, что взятое наудачу число не делится ни на один квадрат натурального числа, кроме единицы.

2. Найдите вероятность того, что наибольший общий делитель k случайных чисел равен единице.

3. Придумайте ненулевую оценку снизу на вероятность того, что k случайных чисел попарно взаимно просты (k фиксировано).

Подсказка. Для начала попробуйте найти вероятность того, что никакие два числа не делятся на фиксированное простое число p. Затем, воспользовавшись неравенством Бернулли, решите задачу.

4. Придумайте ненулевую оценку снизу на вероятность того, что произведение k случайных чисел взаимно просто с произведением l случайных чисел.

5. Найдите значение следующего предела:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(n)}{n}}{N}.$$

Подсказка. Числитель и знаменатель из задачи про случайные дроби можно брать наудачу из отрезков разной длины. В некоторых случаях получится сохранить исходную плотность точек, соответствующих парам взаимно простых чисел.

Литература

1. *Н.Виленкин.* В таинственном мире бесконечных рядов. – «Квант», 1989, №10.

2. *В.Брагин.* Ряд чисел, обратных к простым. – «Квант», 2019, №5.

3. *P.Ribenboim.* The New Book of Prime Number Records. – Springer, 1996.

4. *G.H. Hardy, E.M.Wright.* An Introduction to the Theory of Numbers (6th edition). – Oxford University Press, 2008.

ЮЛИЙ МЕНДЕЛЕЕВИЧ БРУК

Ушел из жизни Юлий Менделеевич Брук. Жизнь и судьба Юли Брука неразрывно связана с теоротделом ФИАНа, где он многие годы занимался научной работой, с физическими олимпиадами (он участвовал в организации и проведении многих Всесоюзных и Всероссийских олимпиад) и с журналом «Квант». Хотя в редколлегию журнала он вошел только в 1981 году, его тесная связь с «Квантом» началась даже не с момента выхода первого номера журнала в 1970 году, а гораздо раньше. После того, как в 1964 году академик П.Л.Капица высказал идею о создании детского физико-математического журнала, Юля активно взялся за реализацию этой идеи. Недаром его считали самым глубоким и информированным историком «Кванта». И не только историком, но и активным автором, написавшим замечательные статьи и придумавшим много интересных задач. Одну из статей Юли Брука, в память о нем, мы воспроизводим в этом номере журнала. Но сначала предоставим слово соавтору Юли и его близкому другу Альберту Леонидовичу Стасенко.

Юлий Менделеевич Брук (22.02.1940–24.04.2021)

В одной из старых статей по истории «Кванта» промелькнуло: «легендарный Юлий Менделеевич Брук». Подчеркивалась его самая активная деятельность при образовании журнала, общение со знаменитыми отцами-академиками.

Юля обладал талантом писателя, был неиссякаемым источником физических сюжетов, отличался строгостью вычислителя и ответственностью творца.

Еще целый пласт его деятельности – активное участие в организации Всесоюзных и Всероссийских физических олимпиад. Как-то в самолете по пути на одну из олимпиад доказывали всемирность Юли: *Брук*хейвен, Инс*брук*... А кто-то вспомнил древнеримского Юлия: «И ты, *Брук*!»

Юля обладал кругом общения буквально глобального масштаба, следил за судьбами друзей, рассеянных по всему миру. Заканчивая обстоятельные беседы, неизменно напоминал собеседнику поцеловать жену, а отпрыскам передать привет – персонально! В эпоху почтового общения вел оживленную переписку, при этом с забавной серьезностью упаковывал письма в двойной конверт, тщательно промазав клеем, и не забывал вскоре сообщить адресату по телефону содержание послания – так надежнее.

Юля Брук принадлежал эпохе научно-просветительского романтизма. Посланник Неба, светлый человек, оставивший теплую сердечную память у современников.

И – чтобы развеять грусть неизбежных прощаний — слова поэта:

Мы все сиротеем на нашем пути.
Закон расставанья царит над планетой.
Дай, Боже, нам в будущей жизни найти,
Кого потеряли мы в этой!

Белые карлики – кристаллические звезды

Ю.БРУК, Б.ГЕЛЛЕР

В бескрайней пустоте изнеможенный шар,
Охваченный тоской и горем без предела,
Уродливый, немой, давно окаменелый,
Вращался, позабыв, что раньше был не стар.

Леконт де Лиль. Последний бог

В этой статье мы постараемся рассказать о том, что нельзя увидеть ни в микроскоп, ни в телескоп, но что можно понять с помощью довольно простых и привычных представлений. Речь пойдет в основном о белых карликах и … конденсаторах. Что такое конденсатор, знают, конечно, все читатели «Кванта». Про белые карлики читатели тоже, вероятно, слышали. Так называются очень плотные звезды с массой примерно такой же, как у нашего Солнца, но с радиусом в несколько сотен или даже в тысячу раз меньшим солнечного. Разглядеть, как устроены внутренности белого карлика, мы, конечно, не можем. Но, порассуждав о плоском конденсаторе, мы сможем, воспользовавшись физическими аналогиями, получить представление о том, как устроены эти далекие и мало похожие на Солнце звезды.

Опубликовано в «Кванте» №6 за 1987 год.

Немного простых вычислений

Масса типичного белого карлика $M \sim 2 \cdot 10^{30}$ кг, его радиус $R \sim 10^{-2} R_{\odot}$ ($R_{\odot} = 7 \cdot 10^{8}$ м – радиус Солнца). Среднюю плотность вещества ρ, из которого состоит карлик, мы получим, разделив массу звезды на ее объем: ρ оказывается порядка 10^9 кг/м^3.

Если бы мы пожелали «построить» белый карлик из отдельных атомов, мы должны были бы собрать их в большое облако вблизи той «точки» в пространстве, куда хотим «поместить» звезду, и сжать это облако до плотностей примерно в 10^6 раз больших, чем средняя плотность нашей планеты. В космическом пространстве облака из молекул или атомов сжимаются под действием сил гравитации.

Реальные белые карлики, как это вытекает из теории строения и эволюции звезд,

содержат мало «тяжелых» элементов или даже совсем их не содержат. Для оценок можно считать, что белый карлик «построен» из одинаковых атомов, имеющих примерно по десятку электронов на атом. Массу m атома при этом можно принять примерно в 20 раз большей массы нуклона, т.е. считать $m \sim 10^{-26}$ кг. Разницей масс нуклонов (протона и нейтрона), а также массой электронов при грубом расчете можно, конечно, пренебречь. Это вполне разумные допущения, и они фактически не повлияют на те выводы, к которым мы придем.

Число n атомных ядер в единице объема получится, если разделить ρ на m. Для нашего белого карлика n оказывается $\sim 10^{35}$ м$^{-3}$. Значит, средний объем пространства, приходящегося на одно ядро, $\sim 10^{-35}$ м^3 и среднее расстояние между ядрами $\sim 10^{-12}$ м. Размеры же обычных атомов порядка 10^{-10} м. Так что мы приходим к выводу, что средние расстояния между ядрами внутри белого карлика в сотню раз меньше размеров тех атомов, из которых мы «начинали строить» звезду. Понятно, что при столь больших плотностях атом как система «электроны + ядро» не существует.

В процессе сжатия все электроны в недрах белого карлика уже «отодраны» от своих ядер и образуют электронную жидкость. А как ведут себя ядра (которые можно назвать в таком случае «голодранцами»)? Для них существуют две возможности: они либо «плавают» в «электронном море», напоминая взвесь тяжелых частиц в жидкости, либо образуют кристаллическую решетку, в которую и «налита» электронная жидкость, – тогда система ядер и электронов подобна по структуре обычным металлам.

Какая же из указанных возможностей реализуется на самом деле? Белые карлики – жидкие или кристаллические?

Наша цель – разобраться в этом вопросе. И поможет нам, как это ни удивительно на первый взгляд, плоский конденсатор.

Плоский конденсатор и плазменная частота

Совокупность электронов и ядер внутри белого карлика образует плазменную систему, которая похожа на плазму в недрах Солнца или на плазму, образующуюся при обычном газовом разряде. Общим для этих систем является сосуществование положительно и отрицательно заряженных частиц, взаимодействие между которыми обусловлено кулоновскими силами. (О том, чем существенно отличается плазма в белых карликах от классической кулоновской системы зарядов с противоположными знаками, мы поговорим позже.) В целом плазменные системы электронейтральны. А что произойдет, если в какой-то небольшой области пространства электронейтральность нарушится?

Рассмотрим элемент объема, занятого плазмой, между двумя плоскими площадками. Сначала обсудим простой случай, когда положительные и отрицательные заряды в плазме одинаковы по абсолютной величине. Пусть площадь каждой площадки S, а расстояние между ними d. Заряды частиц будем считать равными $\pm e$, а их концентрацию – равной n_e. Предположим, что мы смогли разделить заряды в этом объемчике и поместить все положительные заряды на одну площадку, а все отрицательные – на другую. По существу мы создали заряженный плоский конденсатор. Очевидно, что абсолютная величина заряда пластин этого конденсатора $Q = n_e eSd$, а напряженность поля в нем $E = Q/(\varepsilon_0 S) = n_e ed/\varepsilon_0$.

В реальной плазме никаких площадок-пластин, конечно, не существует, но ясно, что взаимное смещение зарядов разных знаков приводит к появлению сил, стремящихся это смещение ликвидировать. Для оценки этих сил можно рассуждать так. Пусть среднее относительное смещение частиц с противоположными зарядами равно d. Появившееся при смещении электрическое поле можно оценить, пользуясь приведенной выше формулой для конденсатора. Сила, действующая на одну частицу, равна $eE = n_e e^2 d/\varepsilon_0$; разделив эту силу на массу частицы m, получим ее ускорение: $n_e e^2 d / (\varepsilon_0 m)$. Обратите внимание: сила и ускорение частицы пропорциональны ее смещению, а направлены они так, чтобы восстановить равновесие. Но это означает, что частица будет совершать гармонические колебания, и мы можем сразу же сказать, какова должна быть частота этих колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}. \qquad (*)$$

Колебания с частотой ω_0 называют электростатическими, ленгмюровскими или просто плазменными.

Вероятно, читатель уже догадался, какой следующий шаг мы собираемся сделать в наших рассуждениях. Конечно, мы должны попытаться понять, нельзя ли обобщить эти рассуждения о плазменных колебаниях на электронно-ядерную плазму в белых карликах. Ответ на этот вопрос положительный, такое обобщение действительно возможно. В электронно-ядерной плазме тоже должны быть колебания, обусловленные взаимными смещениями зарядов. Но этот случай отличается от рассмотренного выше простейшего тем, что заряд ядра не равен заряду электрона. Разные у них и массы. И очень важно, что концентрация частиц в плазме белого карлика в сотни тысяч раз больше, чем, скажем, в солнечной плазме. При таких концентрациях плазму нужно описывать квантовыми законами (тогда как солнечную плазму можно считать классическим газом заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона). Оказывается к тому же, что вопрос о плазменных колебаниях в белых карликах тесно связан с вопросом о возможности существования в них кристаллических структур. Обсуждением этих вопросов мы теперь и займемся.

Ядерные кристаллы и устойчивость кристаллической решетки

Одно из самых обычных и привычных для нас фазовых превращений – это кристаллизация. Никого не удивляет, что зимой реки и озера покрываются льдом. Замерзают порой даже моря. Но разве не удивительно, что кристаллизация может происходить и в плазменном море, образуемом электронами и атомными ядрами внутри белых карликов?

В ранних теориях белых карликов считалось, что вещество при плотностях, типичных для внутренних областей этих звезд, представляет собой жидкую смесь ядер и электронов. Ядра в таком «растворе», как и частицы в обычных жидкостях, могли бы «без особых усилий» перемещаться на довольно значительные расстояния, движение их при этом могло бы быть совершенно хаотическим. Идеи о построении и устойчивости решеток из атомных ядер, погруженных в электронное море, появились немногим более двадцати лет назад.

Давайте и мы предположим, что атомные ядра с зарядами Ze действительно образуют кристаллическую решетку, т.е. «привязаны» к определенным местам в пространстве. Окружающие их электроны «вольны», конечно, «гулять» по всему этому кристаллу, но в среднем около каждого ядра находится Z электронов. Разрушение решетки было бы, очевидно, возможно, если бы ядра могли сильно смещаться из своих положений равновесия. Малые же колебания ядер к разрушению решетки не приводят.

В обычных твердых телах колебания кристаллической решетки имеют в основном температурное происхождение. Для ядерного же кристалла очень важную роль играет кулоновское взаимодействие. Колебания плазменного типа будут происходить при любых температурах, в том числе и при очень низких. Наша цель сейчас – оценить частоту и энергию этих колебаний и сравнить последнюю с потенциальной энергией ядра в кристаллической решетке и с величиной kT, характеризующей температурные колебания. Если потенциальная энергия окажется намного больше kT и характерной энергии плазменных колебаний, то мы сможем сказать, что ядро «привязано» к «своему» узлу в кристаллической решетке.

Удобно разделить всю нашу систему «ядра + электроны» на условные ячейки, имеющие сферическую форму и такие, что

Это по существу та же формула (*). Но только сейчас речь идет о колебаниях ядер с зарядом Ze и массой $m_я$. Мы уже упомянули, что из-за большой концентрации частиц плазма в белом карлике описывается квантовыми законами. Естественно, что и колебания в такой плазме должны квантоваться. Это значит, в частности, что полная энергия колебаний кристаллической решетки, построенной из атомных ядер, складывается из отдельных порций – квантов энергии. Зная частоту колебаний, легко оценить и энергию такой порции. Для этого надо частоту Ω_0 умножить на постоянную Планка $\hbar$ $\left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$. Величина $\hbar\Omega_0$ и есть характерная энергия плазменных колебаний, относящаяся к одной колеблющейся частице, в нашем случае – к одному ядру. Здесь уместно еще сказать, что для типичных условий внутри белых карликов энергия kT тепловых колебаний (опять же в расчете на одну частицу) много меньше, чем $\hbar\Omega_0$. Это позволяет нам «забыть» о температуре, говоря о колебаниях кристаллической решетки белого карлика. (Желающие могут убедиться в справедливости неравенства $kT \ll \hbar\Omega_0$, подставив в формулу для Ω_0 численные значения параметров, характерные для белых карликов, и приняв для оценки температуру T внутри белого карлика ~ 10^6 К.)

в каждой из них находится одно ядро с зарядом Ze и Z электронов. Если в единице объема содержится $n_я$ ядер, то радиус r ячейки можно определить из условия $\frac{4}{3}\pi r^3 n_я = 1$; отсюда $r \sim n_я^{-1/3}$. В целом каждая такая ячейка электронейтральна. Так как число электронов $Z \gg 1$, можно для оценок считать, что электроны, образующие облако с отрицательным зарядом, равномерно «размазаны» по ячейке. Колебания же ядра в этом отрицательно заряженном облаке происходят с плазменной частотой

$$\Omega_0^2 \sim \frac{n_я (Ze)^2}{\varepsilon_0 m_я} \sim \frac{Z^2 e^2}{\varepsilon_0 m_я r^3}.$$

Итак, нам остается сравнить потенциальную энергию ядра и $\hbar\Omega_0$. Потенциальная энергия ядра, «сидящего» в узле кристаллической решетки, $U_0 \sim \frac{Z^2 e^2}{\varepsilon_0 r}$. Иногда говорят, что эта обычная «кулоновская» формула определяет «глубину потенциальной ямы», в которую «попало» колеблющееся ядро. Можно сказать еще, что U_0 определяет энергию связи ядра в системе окружающих его других частиц.

Запишем теперь отношение $\hbar\Omega_0/U_0$, используя приведенные выше формулы для Ω_0 и U_0:

$$\frac{\hbar\Omega_0}{U_0} \sim \left(\frac{\hbar^2\varepsilon_0}{Z^2e^2rm_я}\right)^{1/2} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2},$$

где $r_0 = \dfrac{\hbar^2\varepsilon_0}{Z^2e^2m_я}$ – параметр, характеризующий ядро с заданными Z и $m_я$. Типичное значение r_0/r для белых карликов – порядка 10^{-5}. (Это число вы можете получить сами, считая плотность вещества в звезде $\sim 10^9$ кг/м^3, а $Z \sim 10$.) Тем самым, мы убеждаемся, что $(r_0/r)^{1/2} \ll 1$, а это-то и означает, что энергия колебаний ядер внутри белого карлика меньше потенциальной энергии. Другими словами, кристаллическая решетка, если она образовалась, сама по себе развалиться не должна!

Кристаллизация в белом карлике

До сих пор мы обсуждали ситуацию, когда обусловленные температурой эффекты можно было не учитывать. В этом случае выполняется неравенство $\hbar\Omega_0 \gg kT$. Однако теория эволюции звезд предсказывает, что, когда белый карлик был молодым, в его недрах шли ядерные реакции и он был довольно-таки горячим. После того как ядерные реакции кончились, температура в звезде могла быть еще около 10^7 К. Естественно, что при достаточно высоких температурах карлик мог и не быть кристаллическим. В его ранней истории возможно существование такого периода, когда kT было больше $\hbar\Omega_0$. В этом случае основную роль играли не плазменные, а температурные колебания. И для этого периода именно kT нужно сравнивать с U_0, чтобы решить вопрос о том, существовала ли тогда кристаллическая решетка.

Но, как бы то ни было, бóльшая часть жизни карлика проходит в условиях, когда $kT < \hbar\Omega_0 \ll U_0$. Поэтому по мере его остывания должна произойти кристаллизация. В кристаллизующейся звезде внутренние области все время остаются горячее наружных, поэтому кристаллическая структура – «корка» – возникает сначала именно снаружи, а уже потом «прорастает» в глубь карлика.

При кристаллизации выделяется энергия, которая в конечном счете звездой излучается. Расчеты показывают, что эта энергия не столь уж и мала. Естественно сравнить ее с полной гравитационной энергией звезды – так называется энергия, которая потребовалась бы, чтобы разрушить гравитирующий шар и «растащить» все составляющие его частицы на достаточно большие расстояния друг от друга. Сравнение позволяет утверждать, что энергия, выделяющаяся при кристаллизации, может достигать долей процента или даже нескольких процентов от полной гравитационной энергии белого карлика. Другим источником энергии, излучаемой карликом, является запас его тепловой энергии. При условии близости температуры внутри звезды к температуре плавления кристаллической ядерной решетки, последняя по оценкам может быть порядка 10^7 К, запасы тепловой энергии могут оказаться сравнимыми с энергией кристаллизации. В принципе можно считать, что белый карлик после прекращения в нем ядерных реакций в состоянии излучить энергию порядка процента от его гравитационной энергии.

Гравитационная энергия звезды по порядку величины равна GM^2/R; подставляя $M \sim 2\cdot10^{30}$ кг, $R = 7\cdot10^6$ м, получим приблизительно $4\cdot10^{43}$ Дж. Средняя светимость горячих и ярких белых карликов порядка $10^{-2}L_\odot$, где $L_\odot \approx 4\cdot10^{26}$ Вт – светимость нашего Солнца (светимость – это полная энергия, излучаемая за единицу времени). Зная это, легко подсчитать, что запасов энергии – тепловой и выделяющейся при кристаллизации – белому карлику должно хватить на излучение по крайней мере в течение 10^9 лет. Приведенные цифры являются, конечно же, лишь типичными значениями, для конкретных звезд они могут отличаться. Часто говорят, что конечными стадиями эволюции звезд могут быть белые карлики, нейтронные звезды или черные дыры. Оказывается, однако, что даже после «бурной молодости» звезды «не хотят умирать». Исчерпав запасы ядерной энергии, они сохраняют все же другие источники и запасы энергии, позволяющие им долго излучать и после того, как они дожили до своей «старости».

Можно теперь сформулировать и основной вывод нашего рассказа о белых карликах. Не очень горячие звезды этого типа должны быть кристаллическими; они кристаллизуются, как только их температура понижается примерно до 10^6 К.

Наблюдать белые карлики очень непросто, особенно если это холодные звезды (в астрономии их называют «красные» белые карлики). Слабый блеск и сложность их спектров требуют очень совершенных телескопов. В то же время сейчас известно несколько тысяч белых карликов, разбросанных в сфере радиусом 100 парсек (1 парсек $\approx 3\cdot 10^{16}$ м) вокруг Солнечной системы. Всего же белые карлики составляют от 5 до 10% всех звезд.

Состояние вещества белых карликов, несуществующее и недостижимое в земных условиях, нам очень важно знать и для физики нейтронных звезд – ведь их наружные слои состоят из вещества примерно с теми же параметрами, что и внутри белых карликов.

О связи главных параметров белых карликов

Основными характеристиками любой звезды являются, конечно, ее масса, радиус, химический состав, температура и светимость. Разумеется, не все эти величины являются независимыми. Легко понять, например, что светимость должна быть связана с температурой – чем горячее звезда, тем больше она излучает. Мы приведем здесь пример другой связи – между массой белого карлика M, его радиусом R и отношением Z/A. Параметры Z и A – это номер в периодической системе элементов и массовое число (т.е. число нуклонов) ядер тех атомов, из которых «построена» звезда. Для простоты будем считать, что белый карлик «построен» из одинаковых атомов (интересующую нас качественную картину это предположение не испортит).

Силы гравитации, сжимающие вещество звезды, создают внутри нее огромное гравитационное давление. Что «противостоит» этому давлению, что обеспечивает равновесие звезды? В случае звезд, подобных нашему Солнцу, гравитационному сжатию противостоит газовое давление (давление плазмы). В белых карликах гравитационное давление уравновешивается давлением электронной жидкости внутри звезды. Из условия равновесия $p_G = p_e$ можно получить формулу, связывающую интересующие нас параметры M, R, Z и A. Но сначала надо найти p_G и p_e. Мы сделаем это, воспользовавшись соображениями размерности.

Естественно предположить, что формула для гравитационного давления в центре звезды должна связать p_G с массой звезды M, ее радиусом R и гравитационной постоянной G. Выпишем размерности этих величин:

$$[p_G] = \text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2},$$

$$[M] = \text{кг},\ [R] = \text{м},\ [G] = \text{кг}^{-1}\text{м}^3\text{с}^{-2}.$$

Будем искать интересующую нас зависимость $p_G(G, M, R)$ в виде $p_G \sim G^x M^y R^z$. Запишем условие равенства размерностей левой и правой частей написанного соотношения:

$$\text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2} = \text{кг}^{-x}\text{м}^{3x}\text{с}^{-2x}\text{кг}^y\text{м}^z = \text{кг}^{-x+y}\text{м}^{3x+z}\text{с}^{-2x}.$$

Такое равенство может быть выполнено, только если

$$1 = -x + y,\ -1 = 3x + z,\ -2 = -2x.$$

Решая эту систему уравнений, получим $x = 1$, $y = 2$, $z = -4$. Следовательно, искомая формула такова:

$$p_G \sim G\frac{M^2}{R^4}.$$

Теперь перейдем к определению p_e. Здесь полезно напомнить, что есть различие между классической солнечной плазмой (ее давление зависит от температуры) и электронной жидкостью в белых карликах. Для такой жидкости (иногда говорят – газа) действуют квантовые законы и давление p_e от температуры не зависит. Поэтому в формулу для электронного давления должна входить постоянная Планка $\hbar$. Естественно предположить, что p_e зависит еще от концентрации электронов n_e и массы электрона m_e. Запишем искомую формулу в таком виде: $p_e \sim \hbar^\alpha m_e^\beta n_e^\gamma$. Числа, α, β и γ определим, сравнивая размерности величин, стоящих слева и справа:

$$[p_e] = \text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2},\ [\hbar] = \text{кг}^1\text{м}^2\text{с}^{-1},$$

$$[m_e] = \text{кг},\ [n_e] = \text{м}^{-3}.$$

Из соотношения

$$\text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2} = \text{кг}^\alpha\text{м}^{2\alpha}\text{с}^{-\alpha}\text{кг}^\beta\text{м}^{-3\gamma}$$

следует система уравнений

$$1 = \alpha + \beta,\ -1 = 2\alpha - 3\gamma,\ -2 = -\alpha,$$

откуда $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = 5/3$. Интересующее нас давление

$$p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3}.$$

При условии полной ионизации в плазме концентрация электронов n_e и концентрация ядер $n_я$ связаны соотношением $n_e = Zn_я$. Но $n_я \approx \approx \frac{\rho}{m_я} \sim \frac{M}{R^3 m_я} \approx \frac{M}{R^3 A m_p}$, где m_p – масса нуклона (различием масс протона и нейтрона мы пренебрегаем). Поэтому

$$p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{ZM}{R^3 A m_p}\right)^{5/3}.$$

А теперь запишем условие равновесия $p_G = p_e$:

$$G\frac{M^2}{R^4} \sim \frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{ZM}{R^3 A m_p}\right)^{5/3},$$

или, после несложных преобразований,

$$M^{1/3} R \sim \frac{\hbar^2}{G m_e m_p^{5/3}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}.$$

Из последней формулы явно видно, что при фиксированном значении Z/A произведение MR^3 постоянно, и, стало быть, для разных карликов с одинаковыми отношениями Z/A массы M обратно пропорциональны R^3. Результат довольно любопытный!

«КВАНТ»УЛЫБАЕТСЯ

Баллада об астронавте

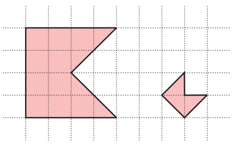
От бета-инвертора
И гамма-конвертора
Осталась обшивка одна.
А ионная пушка,
Как пустая хлопушка,
Торчит, ни на что не годна.
Все распались мезоны,
Все распались нейтроны,
Излучился весь видимый свет.
По закону Кулона
Разбежались протоны,
На лептоны надежды нет.
Поврежденный реактор
Тарахтит, словно трактор,
В биокамере – гниль и прель.
Вот сопло уж забилось,
И дно прохудилось,
И вакуум хлещет в щель...
Он летел к Ориону,
Но поток гравитонов
Пересек неожиданно путь.
Отклонившись от курса
И спустив все ресурсы,
Сумел он от них ускользнуть.
Сделал крюк здоровенный,
Облетел пол-Вселенной
И теперь на пустом корабле
По последней прямой
Возвращался домой,
Приближаясь к планете Земле.
Но борясь с тяготеньем,
Сверх-сверх-сверхускореньем,
Он замедлил стрелки часов.
И стрелки застыли,
На Земле ж проходили
Тысячи тысяч веков.
Вот родные планеты...
Боже! Солнце ли это? –
Темно-красный, чуть теплый шар...
Над Землею дымится,
Над Землею клубится
Водородный, холодный пар.
Что же это такое?
Где же племя людское? –
В неизвестных, далеких мирах.
Вырастают их дети
Уж на новой планете,
А Земля вся в космических льдах.
Ругаясь и плача
От такой неудачи,
Астронавт повернул рычаг,
И раздалсь Б
И раздалось А
И раздалось Х –
БАХ!

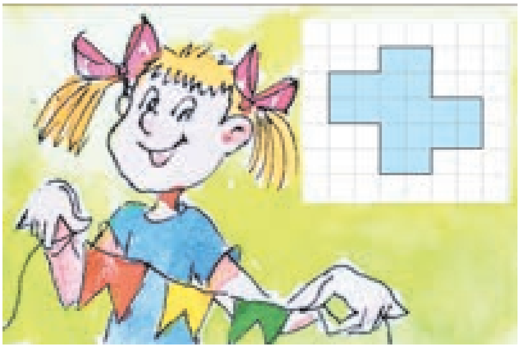
Из книги «Физики шутят»

Задачи

1. Будем называть флажком пятиугольник, вершины которого – вершины некоторого квадрата и

Примеры флажков

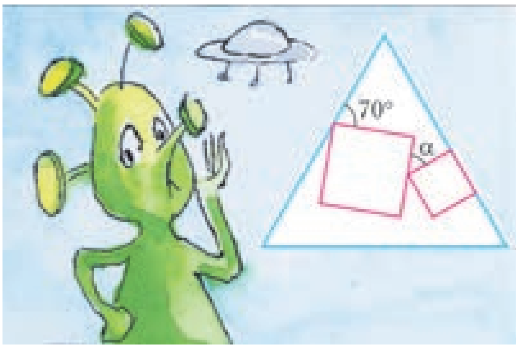




его центр. Разрежьте фигуру на рисунке на флажки (не обязательно одинаковые).

М.Волчкевич, Т.Казицына

2. Внутри правильного треугольника расположены два квадрата. Чему равен угол α?



3. В каждую клетку квадрата 4×4 нужно вписать число так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом

столбце была одна и та же. Некоторые числа уже вписаны. Какое число нужно вписать в закрашенный квадрат?

4. Фокусник научил Каштанку лаять столько раз, сколько он ей тайком от публики покажет. Когда Каштанка таким способом правильно ответила, сколько будет дважды два, он спрятал вкусный кекс в чемодан с кодовым замком и сказал:

– Восьмизначный код от чемодана – решение ребуса УЧУЙ = $\text{КЕ} \times \text{КС}$. Надо заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные разными так, чтобы получилось верное равенство. Пролай нужное число раз на каждую из восьми букв и получишь угощение.

Но тут случился конфуз. Каштанка от волнения на каждую букву лаяла на 1 раз больше, чем надо. Конечно, чемодан не открылся. Вдруг раздался детский голос: «Нечестно! Собака правильно решила ребус!» И действительно, если каждую цифру решения, которое имел в виду фокусник, увеличить на 1, получится еще одно решение ребуса!

Можно ли восстановить: а) какое именно решение имел в виду фокусник; б) чему равнялось число УЧУЙ в этом решении?

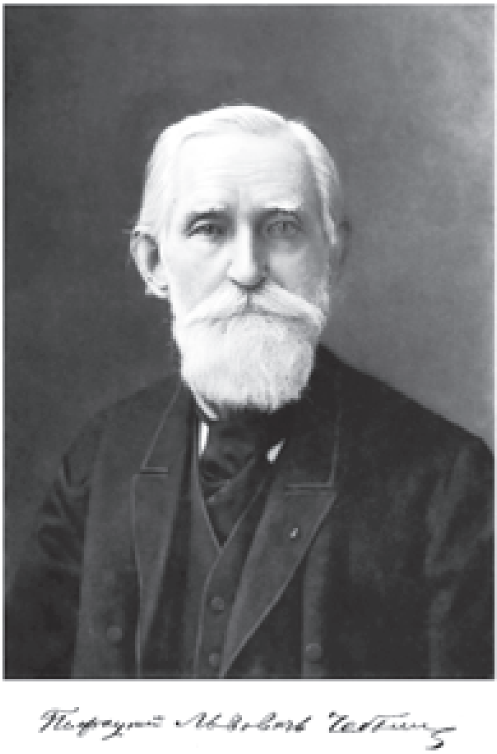
А.Кулыгин, Т.Корчемкина, И.Раскина

Задачи 1 и 4 предлагались на Математическом празднике, задачи 2 и 3 – на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру».

Иллюстрации Д.Гришуковой

К 200-летию П.Л.Чебышёва

В.КОЗЛОВ



В мае этого года математическое сообщество отметило 200-летие со дня рождения великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышёва. Создав знаменитую Петербургскую математическую школу, Пафнутий Львович тем самым заложил фундамент для поступательного развития всей российской математики.

Пафнутий Львович обогатил математику выдающимися результатами, принесшими ему мировую славу. Он внес определяющий вклад в теорию распределения простых чисел, доказал «постулат Бертрана» о наличии простых чисел в промежутке от n до $2n-2$ $(n>3)$. П.Л. Чебышёв получил пионерские результаты по теории вероятностей, сформулировав в общей форме закон больших чисел и центральную предельную теорему. Эти результаты впоследствии дополнены и расширены его учениками А.М.Ляпуновым и А.А.Марковым. Пафнутий Львович решил трудную задачу об условиях интегрируемости биноминального дифференциала в элементарных функциях, которая упоминается во всех учебниках по математическому анализу. Он является создателем конструктивной теории функций; всем известен многочлен Чебышёва, наименее уклоняющийся от нуля. Это направление исследований возникло из желания Чебышёва усовершенствовать плоские шарнирные механизмы. Он своими руками конструировал такие механизмы, среди которых – знаменитая стопоходящая машина, экспонировавшаяся на Всемирной выставке в Париже в 1878 году (см. «Калейдоскоп «Кванта», рисунок 1). Наконец, упомянем Чебышёвские сети в дифференциальной геометрии, которые были введены им в связи с практикой черчения географических карт.

Вообще, П.Л.Чебышёва выделяют органическая связь его исследований по чистой математике и различным ее приложениям. Эта удивительная манера творчества П.Л.Чебышёва сближает его с другим великим гением – К.Ф.Гауссом.

Пафнутий Львович был влиятельным и уважаемым членом Петербургской АН. Академия наук СССР учредила золотую медаль им. П.Л.Чебышёва за лучшие исследования по математике (она присуждается, конечно, и в наше время). В историческом здании Президиума Российской академии наук в фойе зала заседаний установлены четыре бюста знаменитых членов академии. Это Михаил Ломоносов, Леонард Эйлер, Аарон Лерберг (историк) и Пафнутий Чебышёв.

Жизнь и творчество П.Л. Чебышёва дают всем нам (и особенно молодежи) верный ориентир в занятиях математикой. Перефразируя слова Лапласа об Эйлере, можно сказать: читайте Чебышёва, изучайте Чебышёва. Он учитель и наставник всех российских математиков.

В ближайших номерах журнала планируется опубликовать несколько статей, раскрывающих различные грани творчества П.Л.Чебышёва. (*Прим. ред.*)

Три периода изучения теории вероятностей

А.ШИРЯЕВ

Я.Бернулли. В XVII веке – начале XVIII века центральной фигурой (еще раньше были Паскаль, Ферма, Гюйгенс) в исчислении вероятностей был Якоб Бернулли, которому принадлежит введение в науку классического понятия вероятности как отношения числа возможных исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу мыслимых исходов.

Основной результат Я.Бернулли, с которым связывается его имя, это *закон больших чисел*. Это была первая теорема в исчислении вероятностей (опубликована в «Ars Conjectandi» в 1713 году; умер он в 1705 году), и была она доказана абсолютно строго арифметико-комбинаторными методами. (Поэтому Я.Бернулли считается и основателем комбинаторики.)

П.Л.Чебышёв. Среди ученых второй половины XIX века, оказавших для исчисления вероятностей выдающуюся роль, был П.Л.Чебышёв (затем Марков и Ляпунов). Если до него оперировали с объектами, принимающими конечное число значений (в основном, два), то он был первым, кто ввел понятие случайной величины (как функции от элементарного события) и ее математического ожидания, тем самым расширив и углубив все исчисление вероятностей. Ему принадлежит ставшее классическим *неравенство Чебышёва*. Он был первым, кто не только осознал с полной ясностью роль *случайных величин* и их *математических ожиданий*, но и первым, кто стал исследовать *скорость* сходимости допредельных вероятностных законов к предельным. Тем самым, Чебышёв сделал дискретную классическую теорию вероятностей частью общематематического анализа случайных явлений. (Между прочим, общее число работ Чебышёва в теории вероятностей невелико – всего четыре.)

А.Н.Колмогоров. Сама концепция вероятности была предметом интереса и поисков на протяжении нескольких веков. Кульминацией здесь явилась монография А.Н. Колмогорова (1933 год) «Основные понятия теории вероятностей», давшая схему логического обоснования теории вероятностей и сделав ее ветвью математической теории.

Помимо логического обоснования в этой монографии были четко даны такие (постоянно используемые) понятия, как условная вероятность, условное математическое ожидание, закон нуля или единицы, теорема о согласованных распределениях (в этой монографии), которая явилась центральным пунктом в создании теории случайных процессов.

Монография Колмогорова открыла новую эру в развитии теории вероятностей как математической науки и в расширении сферы ее влияния и применений.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2650– М2653 предлагались на весеннем туре XLII Турнира городов.

Задачи Ф2657–Ф2660 предлагались на Московской физической олимпиаде 2021 года.

Задачи М2650–М2653, Ф2657–Ф2660

М2650. При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, произведение которых равно сумме (может быть, других) n последовательных натуральных чисел?

Б.Френкин

М2651. В комнате находятся несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки – вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

М.Дидин

М2652. В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, …, n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остается там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Ф.Ивлев

М2653*. Пусть p и q – взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Каждый раз она прыгает либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещенные лягушкой и отличающиеся ровно на d.

Н.Белухов

Ф2657. Наблюдениям за планетой Венера с Земли мешает ее близость на небе к Солнцу. Угол φ (рис.1) между направлениями с Земли (E) на планету, в данном случае на Венеру (V), и на Солнце (S) называется *элонгацией*. Она бывает восточной и западной в зависимости от расположения планеты на небесной сфере относительно Солнца. Венеру в наибольшей западной элонгации можно наблюдать перед рассветом, а в наибольшей восточной – сразу после заката Солнца. Считается, что планета распола-

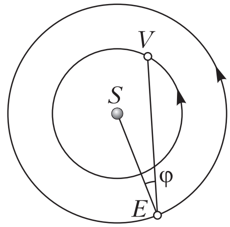


Рис. 1

гается западнее Солнца, если она появляется на небе раньше него. Наибольшее значение элонгации составляет около 46,5°, последний раз близкие значения наблюдались с 11 по 14 августа 2020 года, причем Венера была видна на рассвете. Орбиты Земли и Венеры можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Все планеты вращаются вокруг Солнца в одном направлении, Земля вращается вокруг своей оси в ту же сторону. Отклонение земной оси от перпендикуляра к плоскости вращения планет в данной задаче несущественно.

1) Найдите расстояние от Венеры до Солнца, если расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн км.

2) Когда примерно можно ожидать следующий наиболее подходящий для наблюдения Венеры момент?

А.Дергачев

Ф2658. Безмен – это ручные весы для взвешивания грузов небольшой массы. Один из вариантов конструкции безмена можно видеть на рисунке 2. Безмен состо-

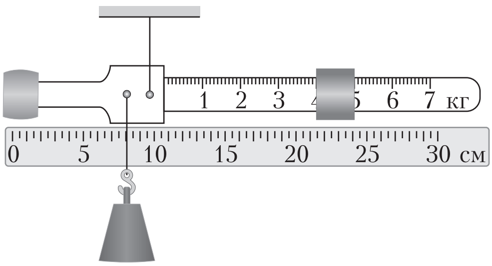


Рис. 2

ит из металлического коромысла, закрепленного на коромысле противовеса (на левом конце коромысла) и подвижной гири (справа). На крючок подвешивается груз, массу которого надо узнать, а положение гири подбирается таким образом, чтобы в равновесии коромысло располагалось горизонтально. Показание безмена, изображенного на рисунке, равно 4 кг. Рядом с безменом находится сантиметровая линейка. Известно, что если с этого безмена снять гирю и подвесить его за ось, к которой был привязан крючок, иначе говоря, перевернуть (рис.3), то в положе-

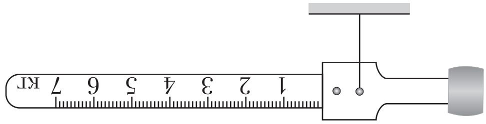


Рис. 3

нии равновесия коромысло будет располагаться горизонтально. Определите по этим данным массу гири m и массу M остальной конструкции (безмена без гири и взвешиваемого груза).

М.Ромашка

Ф2659. На столе стоит цилиндрический сосуд с вертикальными стенками, заполненный водой примерно наполовину. Площадь сечения сосуда равна $S = 400$ см^2, внизу сосуда имеется штуцер, к которому присоединен горизонтально расположенный шланг. Другой конец шланга соединен со штуцером «черного ящика», в котором находится неизвестное устройство (рис.4).

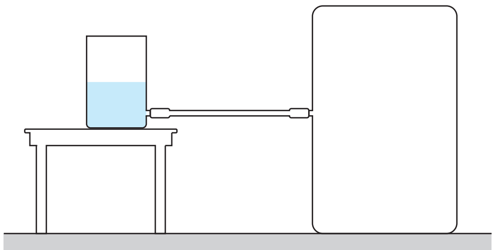


Рис. 4

Неизвестное устройство действует следующим образом. Если в сосуд доливают немного воды (Δm порядка 100 г), уровень жидкости в сосуде опускается (!) по сравнению с первоначальным. Если же после этого из сосуда зачерпывают такую же порцию воды, то уровень поднимается до первоначальной высоты. Предложите конструкцию устройства, которое может находится внутри черного ящика. Изобразите схему устройства и коротко объясните принцип его работы. Известно, что в конструкции устройства используется некоторое оборудование из следующего списка: цилиндрический сосуд – такой же, как на столе, нерастяжимые нити, пружина жесткостью $k = 300$ Н/м, набор грузов разных масс, резиновый шланг с внутренним диаметром, соответствующим диаметру штуцера на стенке ящика. Все грузы и сосуд снабжены крючками, которые могут быть использованы для крепления нитей и пружины. Крепления для нитей и пружины имеются также на потолке и стенках ящика. Плотность воды и ускорение свободного падения равны $\rho = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$ и $g = 10\ \text{Н}/\text{кг}$ соответственно.

А.Бычков

Ф2660. Правильный тетраэдр сделан из непроводящего материала. Его поверхность покрыта тонкой фольгой толщиной h, много меньшей размеров ребер. Удельное сопротивление материала фольги равно ρ. К двум не соприкасающимся ребрам вдоль всей их длины припаяли медные проволочки пренебрежимо малого сопротивления (линии увеличенной толщины на рисунке 5), к которым подключили омметр. Какую величину сопротивления показывает прибор?

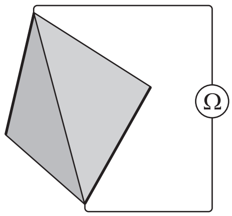


Рис. 5

С.Варламов

Решения задач М2638–М2641, Ф2645–Ф2648

М2638. *Существует ли целое положительное число n такое, что все его цифры (в десятичной записи) больше 5, а все цифры числа n^2 меньше 5?*

Ответ: не существует.

Предположим, что, напротив, существует такое n. Пусть n состоит из k цифр, так что

$$10^k > n \geq \underbrace{666\ldots6}_{k} = \frac{2}{3}\left(10^k - 1\right).$$

Если $n = \underbrace{666\ldots6}_{k}$, то последняя цифра числа n^2 равна 6. Иначе

$$10^k > n > \frac{2}{3}\cdot 10^k,$$

а следовательно,

$$10^{2k} - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{2k} \geq n^2 > \frac{4}{9}\cdot 10^{2k} >$$

$$> \frac{4}{9}\cdot\underbrace{999\ldots9}_{2k} = \underbrace{444\ldots4}_{2k}.$$

Таким образом,

$$\underbrace{999\ldots9}_{2k} \geq n^2 > \underbrace{444\ldots4}_{2k},$$

значит, n^2 состоит из $2k$ цифр, при этом все эти цифры не могут оказаться меньшими или равными 4.

Н.Агаханов

М2639. *а) В пустой таблице 2^{100} строк и 100 столбцов. Алиса и Ева по очереди заполняют пустые клетки первой строки таблицы; Алиса ходит первой. Каждым ходом игрок выбирает пустую клетку и ставит в нее крестик или нолик. После того как в первой строке не остается пустых клеток, игроки переходят ко второй строке и так далее (в каждой новой строке Алиса ходит первой). Игра заканчивается, когда все строки заполнятся. Алиса хочет, чтобы различных строк в таблице было как можно больше, а Ева – как можно меньше. Сколько различных строк будет в таблице, если обе будут действовать наилучшим для себя образом?*

б) Та же игра, но Алиса ставит только крестики, а Ева – нолики.

Ответ: а), б) 2^{50}.

а) Сначала докажем, что Ева может добиться того, чтобы различных строк было не больше 2^{50}. Пусть она разобьет каждую строку на 50 прямоугольников 1×2 (доминошек). Каждый раз, когда Алиса ставит какой-то знак в одну из клеток какого-то прямоугольника, Ева будет ставить противоположный знак в другую клетку этой доминошки. Тогда в любой строке каждая доминошка разбиения может быть только одного из двух типов (крестик-нолик или нолик-крестик), поэтому различных вариантов строк не более 2^{50}.

Теперь докажем, что Алиса может добиться не менее 2^{50} различных строк. Для этого достаточно показать, что, пока заполнено меньше 2^{50} строк, при заполнении новой строки Алиса может действовать так, чтобы эта строка получилась отличной от всех предыдущих.

Обозначим через A_i ($i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 50$) множество тех уже целиком заполненных строк, которые после i-го хода Алисы в текущей строке совпадают с новой строкой во всех ее уже заполненных клетках (в частности, A_0 – это множество всех уже целиком заполненных строк). Заметим, что Алиса может так поставить свой очередной i-й знак, чтобы выполнялось неравенство $|A_i| \le \frac{1}{2}|A_{i-1}|$. Действительно, в столбце над любой пустой клеткой новой строки в строках множества A_{i-1} знаков одного из типов (крестик или нолик) не более $\frac{1}{2}|A_{i-1}|$; пусть Алиса и поставит этот знак в пустую клетку. Тогда если $|A_0| < 2^{50}$, то через 50 таких шагов Алиса получит $|A_{50}| < 1$, т.е. новая строка будет отличаться от всех предыдущих.

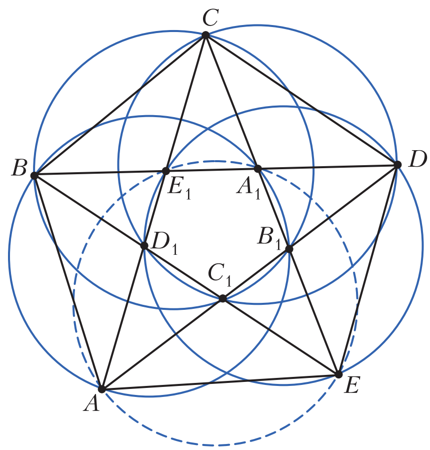
б) Стратегия Евы повторяет ее стратегию из пункта а), только Алиса все время ставит в доминошку крестик, а Ева – нолик.

Для стратегии Алисы сохраняем обозначения пункта а) и снова докажем, что если $|A_0| < 2^{50}$, то при заполнении новой строки Алиса может действовать так, чтобы эта строка получилась отличной от всех предыдущих. Покажем, что Алиса в новой строке может так поставить i-й крестик, чтобы выполнялось неравенство $|A_i| \le \frac{1}{2}|A_{i-1}|$. Действительно, любая строка из A_{i-1} (далее в этом абзаце рассматриваем только такие строки) совпадает с новой строкой в $i-1$ крестике и $i-1$ нолике, поэтому в столбцах над пустыми местами новой строки суммарно стоит $|A_{i-1}| \cdot (50-(i-1))$ крестиков. Так как всего пустых мест $100-2(i-1)$, Алиса может выбрать такое из них, в столбце над которым стоит не более $\frac{1}{2}|A_{i-1}|$ крестиков, и поставить в это место крестик.

Аналогично пункту а), получаем, что если $|A_0| < 2^{50}$, то через 50 шагов Алиса получит новую строку, которая будет отличаться от всех предыдущих.

Д.Афризонов

М2640. *Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ (см. рисунок). Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 – точки пересечения пар диагоналей BD и CE, CE и DA, DA и EB, EB и AC, AC и*



BD соответственно. Докажите, что если четыре из пяти четырехугольников AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E, EA_1E_1A вписанные, то и пятый тоже вписанный.

Приведем здесь, возможно, наиболее короткое решение, которое придумали несколько участников на олимпиаде Мегаполисов (задача предлагалась на этой олимпиаде).

Условие вписанности четырехугольника AB_1A_1B эквивалентно равенству

$$DA_1 \cdot DB = DA \cdot DB_1. \qquad (1)$$

Аналогично, вписанность четырехугольников BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E, EA_1E_1A эквивалентна, соответственно, равенствам

$$EB_1 \cdot EC = EB \cdot EC_1, \qquad (2)$$

$$AC_1 \cdot AD = AC \cdot AD_1, \qquad (3)$$

$$BD_1 \cdot BE = BD \cdot BE_1, \qquad (4)$$

$$CE_1 \cdot CA = CE \cdot CA_1. \qquad (5)$$

Чтобы решить задачу, надо вывести (5), используя (1), (2), (3), (4).

Докажем еще одно соотношение:

$$AD_1 \cdot BE_1 \cdot CA_1 \cdot DB_1 \cdot EC_1 = BD_1 \cdot CE_1 \cdot DA_1 \cdot EB_1 \cdot AC_1. \qquad (6)$$

Действительно, по теореме синусов для треугольника AC_1D_1 имеем $AD_1 \sin\angle AD_1C_1 =$

$= AC_1 \sin\angle AC_1D_1$. Запишем аналогичные соотношения для треугольников BD_1E_1, CE_1A_1, DA_1E_1, EB_1A_1 и перемножим их. Все синусы сократятся из-за равенств веркальных углов: $\angle AD_1C_1 = \angle BD_1E_1$, $\angle BE_1D_1 = \angle CE_1A_1$ и т.д., откуда получаем соотношение (6).

Теперь соотношение (5) получается после перемножения (1), (2), (3), (4), (6) и сокращения на общие множители.

Н.Седракян, Ю.Тихонов

М2641. *Дано целое число $n > 1$. Монетный двор выпускает монеты n различных номиналов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где каждый номинал a_i – целое положительное число (количество монет каждого номинала не ограничено). Множество номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ назовем удачным, если сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ можно набрать монетами ровно одним способом (а именно, взяв по одной монете каждого номинала).*

а) Докажите, что существует такое удачное множество номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < n \cdot 2^n.$$

б) Докажите, что для любого удачного множества номиналов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > n \cdot 2^{n-1}.$$

а) Покажем, что номиналы $a_i = 2^n - 2^{n-i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, составляют удачное множество. Для начала заметим, что

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot 2^n - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = (n-1)2^n + 1 < n \cdot 2^n.$$

Предположим теперь, что S набирается некоторыми монетами:

$$S = \sum_{k=1}^{p} a_{i_k} = p \cdot 2^n - \sum_{k=1}^{p} 2^{j_k},$$

где $j_k = n - i_k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Поскольку $S > (n-1)2^n$, получаем $p \ge n$, и

$$\sum_{k=1}^{p} 2^{j_k} = (p - n + 1)2^n - 1 \equiv -1 \pmod{2^n}.$$

Без ограничения общности считаем, что $j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_p$. Докажем, что $j_k \le k - 1$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Рассуждая от противного, выберем минимальное $k \le n$ такое, что $j_k \ge k$. Тогда

$$-1 \equiv \sum_{s=1}^{k-1} 2^{j_s} \pmod{2^k},$$

что невозможно, так как

$$0 \le \sum_{s=1}^{k-1} 2^{j_s} \le \sum_{s=1}^{k-1} 2^{s-1} = 2^{k-1} - 1.$$

Противоречие.

В итоге получаем

$$(p - n + 1) \cdot 2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2^{j_k} + \sum_{k=n+1}^{p} 2^{j_k} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{p} 2^{n-1} = 2^n - 1 + (p-n) \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{или } (p-n) \cdot 2^n \le (p-n) \cdot 2^{n-1}.$$

Такое может быть, только если $p = n$ и все неравенства обращаются в равенства, откуда $j_k = k - 1$. Другими словами, $S = a_1 + \ldots + a_n$ – действительно единственный способ собрать S предложенными монетами.

б) Покажем, что $a_1 \ge 2^{n-1}$ в любом удачном наборе $a_1 < \ldots < a_n$ из n монет; это сразу дает $S = a_1 + \ldots + a_n > na_1 \ge n \cdot 2^{n-1}$.

Обозначим $a = a_1$. Пусть Σ – набор всех сумм, которые можно собрать с помощью монет $a_2, a_3, \ldots, a_n$, используя их не более чем по одному разу; таким образом, Σ состоит ровно из 2^{n-1} чисел (некоторые из которых могут быть равны друг другу); минимальное из этих чисел 0, а максимальное $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Предположим, что Σ содержит два числа $S_1 \ge S_2$, сравнимых друг с другом по модулю a, так что $S_1 = S_2 + at$ для некоторого целого $t \ge 0$. Тогда существует альтернативный способ собрать S монетами, а именно

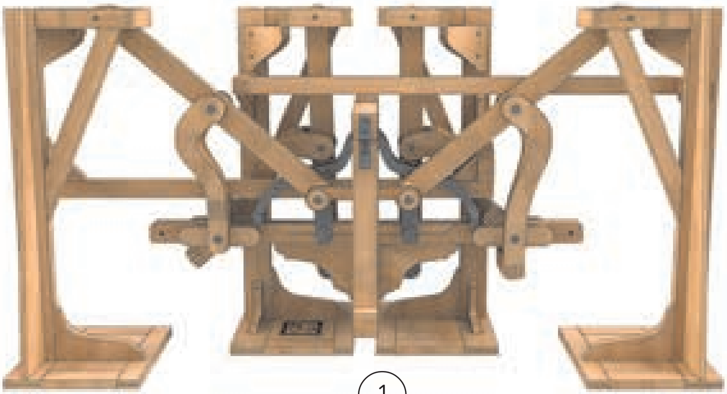
$$S = (S - S_1) + S_2 + at$$

(что означает, что мы берем монеты $a_1, \ldots, a_n$, удаляем набор с суммой S_1, добавляем набор с суммой S_2 и добавляем t монет номиналом a). Это противоречит удачности.

Таким образом, Σ содержит 2^{n-1} чисел, попарно несравнимых по модулю a, что дает $a \ge 2^{n-1}$.

И.Богданов

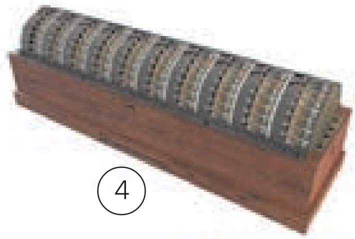
МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА



1

2

3



4

5

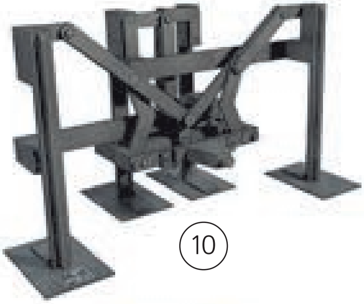
6

7

8

tcheb.ru

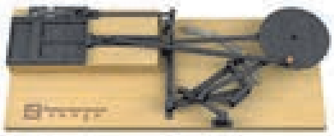

9


10

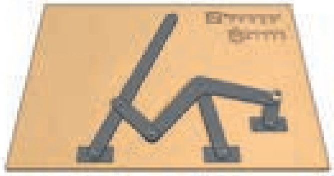

11


12

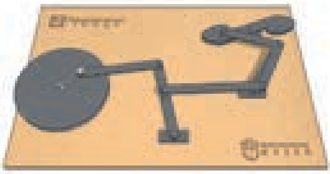

13

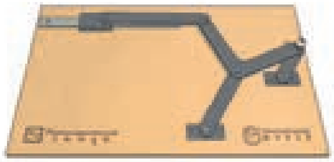

14


15


16

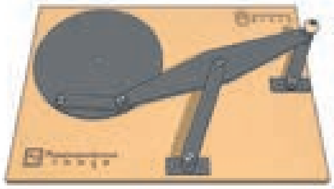

17

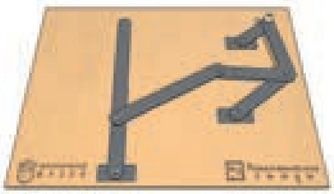

18

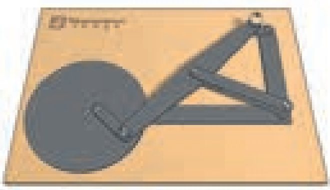

19


20


21

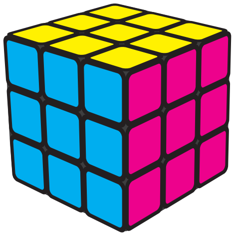

22


23


24


25

Ф2645. *Кубик Рубика с ребром a не имеет пустот и сложен из одинаковых кубиков плотностью* ρ_1 *с ребром* $a/3$*. Если все мелкие кубики, не видимые на рисунке, заменить на другие, такие же по размеру, но с плотностью* ρ_2*, то средняя плотность кубика Рубика увеличится в* $n = 3$ *раза. Чему равно отношение плотностей* ρ_2/ρ_1*?*



На рисунке видно 19 из 27 мелких кубиков. Мы не видим 8 маленьких кубиков, один из которых находится в центре большого кубика. Средняя плотность кубика Рубика вначале равна

$$\rho_{ср.1} = \rho_1,$$

так как все мелкие кубики в этом случае одинаковые. Во втором случае средняя плотность большого кубика равна

$$\rho_{ср.2} = \frac{\frac{V}{27}\cdot 19\rho_1 + \frac{V}{27}\cdot 8\rho_2}{V} = \frac{19\rho_1 + 8\rho_2}{27},$$

где V – объем кубика Рубика. По условию, $n = \rho_{ср.2}/\rho_{ср.1} = 3$. Отсюда находим

$$k = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 7{,}75.$$

С.Кармазин

Ф2646. *Два одинаковых однородных рычага массой* $m = 7$ *кг и длиной 80 см каждый шарнирно соединены с помощью легкого стержня и нитей, между которыми подвешен груз с такой же массой m (рис.1). Определите, на каком расстоянии x от левого края верхнего стержня находится точка крепления нити, удерживающей систему в равновесии, чему равны силы натяжения всех трех нитей и сила, действующая со стороны шарнира на верхний стержень. Для удобства на рисунке стержни размечены на 8 равных частей. Точка крепления самой верхней нити к рычагу изображена условно,* $g = 10$ *Н/кг.*

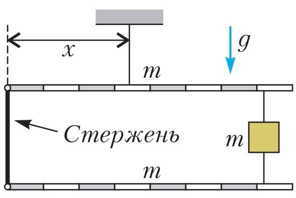


Рис. 1

Расставим сначала только внешние силы, действующие на всю систему в целом (рис.2,*а*). Так как эти силы уравновешивают друг друга, то

$$T_1 = 3mg = 210\ \text{Н}.$$

Приняв длину всего рычага за $8l$, запишем правило моментов относительно левого края системы:

$$2\cdot mg\cdot 4l + mg\cdot 7l = 3mg\cdot x,$$

откуда

$$x = 5l = 50\ \text{см}.$$

Теперь рассмотрим силы, действующие только на нижний рычаг (рис.2,*б*). Запи-

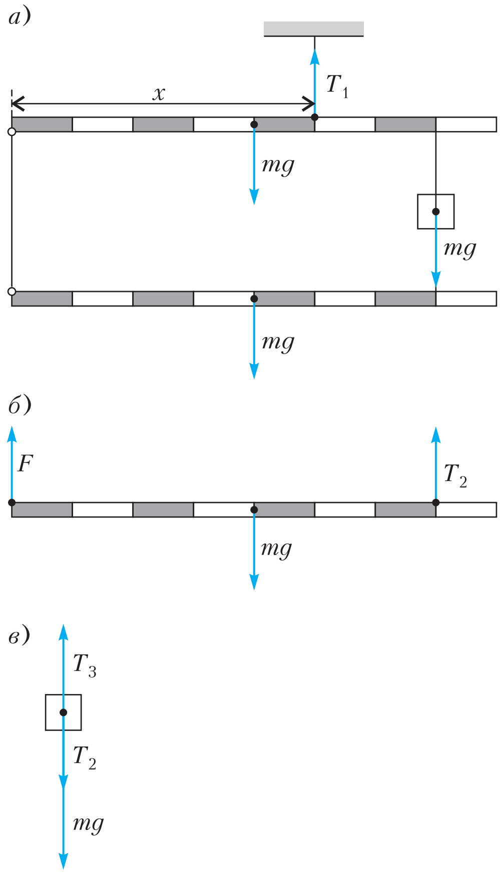


Рис. 2

сав правило моментов относительно левого края, получим

$$T_2 \cdot 7l = mg \cdot 4l,$$

откуда

$$T_2 = \frac{4mg}{7} = 40\ \text{Н}.$$

Так как все силы, действующие на рычаг, компенсируют друг друга, то

$$F = mg - T_2 = \frac{3mg}{7} = 30\ \text{Н}.$$

Но стержень легкий, поэтому такая же сила F действует со стороны этого стержня на верхний рычаг.

Сила натяжение верхней нити, удерживающей груз m, теперь может быть найдена из условия равновесия этого груза (рис.2,*в*):

$$T_3 = mg + T_2,$$

откуда

$$T_3 = \frac{11mg}{7} = 110\ \text{Н}.$$

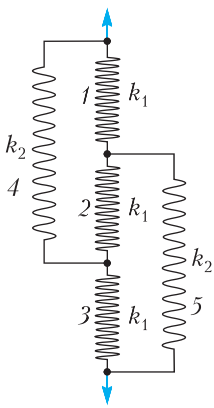
Такой же результат можно получить, записав правило моментов для верхнего рычага.

М.Замятнин

Ф2647. *Пять пружинок соединены так, как показано на рисунке, и в исходном состоянии ни одна из них не деформирована. Коэффициенты жесткости трех пружин равны k_1, а двух оставшихся – k_2.*

1) Чему равен эффективный коэффициент жесткости системы пружин?

2) Систему растягивают, прикладывая к ее концам одинаковые силы. При каком соотношении k_1 и k_2 пружина 2 окажется сжатой?



Пусть удлинение пружин *1* и *3* равно x (из симметрии следует, что их удлинения одинаковы), а пружины *2* равно y. Тогда пружины *4* и *5* растянуты на $x + y$. Рассмотрим силы, приложенные к точке соединения пружин *1*, *2* и *5*:

$$F_1 = F_2 + F_5,\ \text{или}\ \ k_1x = k_1y + k_2(x + y).$$

Отсюда

$$y = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}x.$$

Если при положительных x удлинение $y < 0$, то это означает, что пружина *2* сжата. Это возможно при $k_2 > k_1$. Если $k_2 < k_1$, то пружина *2* растянута. При $k_2 = k_1$ пружина *2* не деформирована.

Общее увеличение длины системы пружин

$$\Delta l = 2x + y = \frac{3k_1 + k_2}{k_1 + k_2}x.$$

Приложенная к концам системы сила

$$F = F_1 + F_4 = k_1x + k_2(x + y) =$$

$$= k_1x + k_2\frac{2k_1}{k_1 + k_2}x = k_1\frac{k_1 + 3k_2}{k_1 + k_2}x.$$

Эффективный коэффициент жесткости

$$k = \frac{F}{\Delta l} = k_1\frac{k_1 + 3k_2}{3k_1 + k_2}.$$

А.Аполонский

Ф2648. *Лодка переплывает реку по прямой, перпендикулярной берегам. Ее скорость относительно воды равна v_0. До середины реки скорость течения изменяется по закону $u = \alpha x$ от нуля до $v_0/2$ – скорости воды на середине реки, где α – известный коэффициент, x – расстояние от берега. После середины реки скорость уменьшается до нуля у другого берега по тому же закону. Определите зависимость от времени угла между вектором скорости лодки относительно воды и направлением движения относительно берега. Через какое время лодка окажется на другом берегу?*

Возможны разные способы решения. Рассмотрим три из них.

Первый способ

В треугольнике скоростей скорость течения $u = \alpha x$, скорость лодки относительно берега $v = dx/dt$, а ее скорость v_0 относительно воды направлена под углом φ с нормалью к берегу (рис.1). Тогда $v = v_0\cos\varphi$. За малое время dt лодка пере-

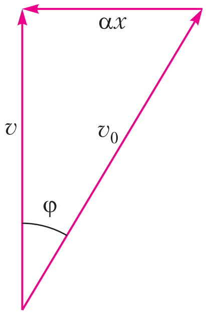


Рис. 1

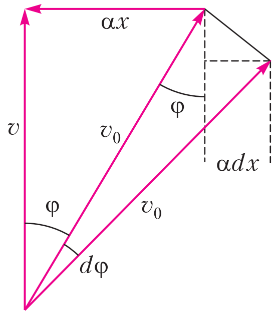


Рис. 2

мещается в направлении противоположного берега на расстояние dx, а направление вектора скорости лодки изменяется на угол $d\varphi$ (рис.2). При этом

$$\alpha dx = \alpha v dt = \alpha v_0 \cos\varphi \cdot dt.$$

Выразим отрезок αdx через длину дуги с углом $d\varphi$ окружности радиусом v_0:

$$\alpha dx = v_0 d\varphi \cos\varphi.$$

Получается, что $d\varphi = \alpha dt$, или

$$\varphi = \alpha t.$$

Вектор относительной скорости поворачивается с постоянной угловой скоростью. На середине реки $u = v_0/2$, тогда угол $\varphi = \pi/6$, а время $t = \pi/(6\alpha)$. От этой середины до другого берега вектор относительной скорости поворачивается с той же угловой скоростью, но в противоположную сторону. Из симметрии полное время

$$T = 2t = \frac{\pi}{3\alpha}.$$

Второй способ

Построим треугольник скоростей для лодки (см. рис.1). Из теоремы Пифагора

$$v_x^2 + (\alpha x)^2 = v_0^2.$$

После дифференцирования по времени получим

$$2a_x v_x + 2\alpha^2 x v_x = 0, \text{ или } a_x = -\alpha^2 x.$$

Последнее уравнение – это уравнение гармонических колебаний. Из начальных условий ($x = 0$, $v_x = v_0$) находим его решение:

$$v_x = v_0 \cos\alpha t.$$

Также из треугольника скоростей видим, что $v_x = v_0 \cos\varphi$, откуда

$$\varphi = \alpha t.$$

В момент достижения середины реки

$$v_x = \frac{v_0\sqrt{3}}{2},\ t = \frac{\pi}{6\alpha}.$$

Общее время движения

$$T = 2t = \frac{\pi}{3\alpha}.$$

Третий способ

Из теоремы Пифагора (см. рис.1) следует

$$v_x^2 + (\alpha x)^2 = v_0^2.$$

Отсюда скорость лодки

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - (\alpha x)^2},$$

а время

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - (\alpha x)^2}}.$$

Время, которое необходимо для преодоления некоторого расстояния x_1,

$$t_1 = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - (\alpha x)^2}} = \frac{1}{\alpha}\arcsin\frac{\alpha x_1}{v_0}.$$

В частности, при $x = v_0/(2\alpha)$ (середина реки) время $t = \pi/(6\alpha)$. Общее время движения

$$T = \frac{\pi}{3\alpha}.$$

Для определения искомого угла заметим, что из треугольника скоростей $\sin\varphi = \alpha x/v_0$, откуда

$$\varphi = \alpha t.$$

А.Уймин

Вниманию наших читателей

В статье Ю. Матиясевича «Десятая проблема Гильберта» в «Кванте» № 2 за 2021 год была допущена опечатка в формуле (12) – формуле Бине для чисел Фибоначчи. Формулу следует читать так:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

(где $\varphi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ – золотое сечение). Аналогичная опечатка была также допущена в «Калейдоскопе «Кванта» в № 3 за 1988 год. Благодарим за обнаружение этих опечаток Л.М. Коганова, члена Московского математического общества.

Одноцветный треугольник площади 1 на покрашенной плоскости

В.Брагин

Эта статья посвящена решению следующей трудной задачи с простым условием (см. «Квант» № 8 за 2020 г.):

М2617. *Плоскость покрашена в* 100 *цветов. Докажите, что найдутся три точки одного цвета, являющиеся вершинами треугольника площади* 1.

В решении этой задачи мне посчастливилось использовать классическую теорему Ван дер Вардена:

Для любых натуральных k и r существует натуральное число $W(k;r)$ со следующим свойством: если раскрасить элементы арифметической прогрессии длины $W(k;r)$ произвольным образом в k цветов, то среди них найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины r.

Далее *арифметической прогрессией прямых* длины n назовем последовательность различных параллельных прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$ такую, что расстояния между парами прямых с соседними номерами равны (рис. 1).

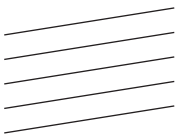


Рис. 1

Теперь будем раскрашивать не числа, а точки. Докажем утверждение, из которого задача очевидно следует.

Теорема. *Для любого натурального n существует натуральное $L(n)$, обладающие следующим свойством. Пусть дана арифметическая прогрессмя из $L(n)$ прямых, и пусть каждая точка на кажддой из этих прямых окрашена в один из n цветов. Тогда найдутся три точки одного цвета, лежащие на прямых из этой прогрессии, являющиеся вершинами треугольника площади* 1.

Доказательство будем вести по индукции.

База: $n = 1$. Достаточно взять $L(1) = 2$. Если есть две прямые, полностью покрашенные в один цвет, то очевидно найдется одноцветный треугольник любой площади.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20210503

Сделаем *переход* от n к $n+1$. Окажется, что можно положить

$$L(n+1) = (2L(n)!)! \cdot W(n+1; 2L(n)!)! + 1$$

(да!! тут очень много факториалов).

Рассмотрим арифметическую прогрессию из $L(n+1)$ прямых, где расстояние между соседними прямыми равно h, такую, что на этих прямых есть только $n+1$ цвет. Предположим, что одноцветного треугольника площади 1 с вершинами на этих прямых нет, и докажем, что тогда найдется арифметическая прогрессия из $L(n)$ прямых, на которых одного из цветов совсем нет, после этого воспользуемся предположением индукции.

Обозначим $N = 2L(n)!$, $K = W(n+1; N)$, $M = N! \cdot K!$, так что $L(n+1) = M + 1$.

Рассмотрим арифметическую прогрессию из K точек $x_1, \ldots, x_K$ на прямой l_1 (рис. 2). Разность t этой прогрессии выберем равной $\frac{1}{2hM}$. По теореме Ван дер Вардена, из этих K точек, покрашенных в $n+1$ цвет, можно выбрать одноцветную арифметическую прогрессию из N точек, для определенности красного цвета. Разность этой прогрессии равна St, где S – натуральное число, не превышающее K. Тогда прямые, параллельные l_1, находящиеся от нее на расстояниях $\frac{1}{2St}, \frac{1}{2 \cdot 2St}, \ldots$ $\ldots, \frac{1}{(N-1) \cdot 2St}$, совсем не содержат точек красного цвета, иначе получился бы треугольник площади 1 с вершинами красного цвета. Кроме того, все эти прямые содержатся среди наших, потому что расстояния от всех упомянутых прямых равны $\frac{1}{2aSt}$, где $1 \le a \le N-1$, а частные этих чисел при делении на h равны

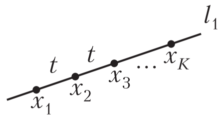


Рис. 2

$$\frac{1}{2aSth} = \frac{2hM}{2aSh} = \frac{M}{aS} = \frac{N!}{a} \cdot \frac{K!}{S}.$$

Из выражения $\frac{N!}{a} \cdot \frac{K!}{S}$ видно, что эти частные целые, а из $\frac{M}{aS}$ – что они меньше M.

Значение N подобрано с таким расчетом, чтобы из нашего множества прямых, не содержащих красных точек, нашлось $L(n)$ прямых, образующих арифметическую прогрессию. Действительно, достаточно среди них выбрать прямые, находящиеся от l_1 на расстояниях $\frac{1}{N \cdot St}$, $\frac{1}{(N/2) \cdot St}$, $\frac{1}{(N/3) \cdot St}$, ..., $\frac{1}{(N/L(n)) \cdot St}$.

Этим завершается доказательство теоремы, и задача М2617 решена.

Расскажем теперь о том, как это решение придумывалось. Зачастую очень важно не только читать строгое, четкое и аккуратное решение задачи, но и осознать ключевые идеи, показанные «на пальцах».

К решению задачи я подошел с другой стороны. Если я найду на какой-то прямой l одноцветную арифметическую прогрессию длины k с разностью $2d$, то найдутся $k-1$ прямых, параллельных l и лежащих по одну сторону от l на расстояниях $\frac{1}{2d}$, $\frac{1}{4d}$, $\frac{1}{6d}$, ..., $\frac{1}{2(k-1)d}$ от l, на которых этого цвета не будет. Читатель заметит, что это не арифметическая прогрессия прямых. Собственно, у меня на этом этапе мыслительного процесса еще и не было понимания, что именно ее надо искать. Но потом это понимание появилось, когда я понял, что надо понемногу исключать цвета, оставляя достаточно много параллельных прямых, на которых этих цветов нет. Но если это будут прямые без всякой структуры, то неясно, как потом исключать цвета. После этого родилась идея формулировки теоремы, которая позволила «обуздать хаос». Далее я понял, что k должно быть столь велико, чтобы среди чисел $\frac{1}{2d}$, $\frac{1}{4d}$, $\frac{1}{6d}$, ..., $\frac{1}{2(k-1)d}$ нашлась арифметическая прогрессия длины $L(n)$. Как такое k подобрать, я уже знал из «олимпиадного фольклора». Например, можно взять $k-1 > L(n)$. Тогда числа $\frac{1}{L(n)!}$, $\frac{2}{L(n)!}$, $\frac{3}{L(n)!}$, ..., $\frac{1}{(L(n)-1)!}$ образуют арифметическую прогрессию длины $L(n)$ с разностью $\frac{1}{L(n)!}$. Следующая проблема в том, что я заранее не знаю, какое d получится. К счастью, теорема Ван дер Вардена говорит, что таких d конечное количество, поэтому в моей прогрессии с $n+1$ цветом должны быть все прямые на расстояниях $\frac{1}{2d}$, $\frac{1}{4d}$, $\frac{1}{6d}$, ..., $\frac{1}{2(k-1)d}$ для всех возможных d. Поскольку все возможные значения d все же соизмеримы (т.е. отношение любых двух рационально), а если точнее, $2d$ принимает значения от 1 до $W(n+1;2L(n)!)$ (с запасом), то существует некоторое рациональное число, которое укладывается целое количество раз в каждом из встретившихся нам расстояний. Например, числа 1/100, 1/1001, 1/17 «делятся» на $1/(100 \cdot 1001 \cdot 17)$, т.е. достаточно взять дробь 1/(произведение всех знаменателей). Это соображение и выводит на финишную прямую в конструировании $L(n+1)$. Это число должно делиться на все знаменатели, которые встретятся. Поэтому можно взять $L(n+1) = (2L(n)!)! \cdot (W(n+1;2L(n)!))!$ Действительно, второй множитель точно делится на любое d, а первый точно делится на то, на что d домножается в знаменателе в дробях $\frac{1}{2d}$, $\frac{1}{4d}$, $\frac{1}{6d}$, ..., $\frac{1}{2(k-1)d}$.

Читатель, не столь привыкший читать тексты с громоздкими выкладками, мог быть озадачен, увидев большие формулы в самом начале. Но появились эти константы далеко не сразу, а когда задача уже была решена и почти записана. При чтении многих решений задач полезно понимать, что придуманы они были в совсем другом виде. А иногда можно по решению задачи попробовать восстановить, как оно могло быть придумано.

Лунный тормоз, столкновение с Тейей и закон сохранения момента импульса

С.ПАРНОВСКИЙ

«Ничто не вечно под луной», – поется в известной оперетте. Меняется многое, в том числе и длительность суток. Точные эталоны времени утверждают, что за год она увеличивается на 23 микросекунды. Иными словами, вращение Земли замедляется, пусть и очень медленно. Это замедление предсказал еще в конце 19 века английский астроном Джордж Дарвин (сын Чарльза Дарвина). Он и указал виновника – ту самую Луну, под которой все не вечно.

Луна вызывает приливы на Земле, которые создают момент силы, заставляющий нашу планету замедляться. При этом ее момент импульса передается Луне, которая за счет этого удаляется от Земли. Расстояние между Луной и Землей, усредненное за период обращения Луны, возрастает за год на 38 миллиметров. Это явно немного в астрономических масштабах, но если подумать, что за миллиарды лет изменения станут очень большими, то к ним не стоит относиться пренебрежительно.

Подробно о том, что приливы передают момент импульса от Земли к Луне, рассказывается в статье Л.Асламазова «Лунный тормоз» в «Кванте» №8 за 1987 год (который легко найти в архиве старых номеров) или в книге Л.Г.Асламазова и А.А.Варламова «Удивительная физика». Поэтому не будем повторять, как притяжение Луны вызывает приливные волны в океане, как эти волны немного повернуты относительно направления на Луну из-за вращения Земли и как их притяжение к Луне обеспечивает тот самый момент сил, который и вызывает все те изменения, о которых уже упоминалось. Скажем только, что расчет этого момента очень сложен и что он зависит не только от меняющегося со временем расстояния до нашего спутника, но и от конфигурации материков на Земле.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20210504

Однако, для ответа на многие вопросы его и не надо вычислять. Достаточно воспользоваться законом сохранения момента импульса в системе Земля–Луна. Его мы вычислим относительно центра Земли. Естественно, что он будет суммой момента импульса вращения Земли вокруг своей оси и момента импульса движения Луны по орбите вокруг Земли. Оценим эти величины.

Начнем с Луны. Ее момент импульса равен $L_{\text{Л}} = mvr = m\omega r^2 \approx 28 \cdot 10^{33}$ кг · м^2/с, где $m \approx 7{,}3 \cdot 10^{22}$ кг – масса Луны, $r \approx 3{,}8 \cdot 10^8$ м – среднее расстояние от Земли до Луны, $\omega = 2\pi/T_{\text{Л}}$ – угловая скорость обращения Луны, $T_{\text{Л}} \approx 27{,}32$ суток – период обращения Луны вокруг Земли. При желании можно учесть и момент импульса, связанный с вращением Луны вокруг своей оси, но он мал по сравнению с $L_{\text{Л}}$.

Момент импульса Земли найдем по известной формуле $L_{\text{З}} = I\Omega$, где угловая скорость вращения Земли равна $\Omega = 2\pi/T_{\text{З}}$, а $T_{\text{З}} = 1$ сутки. Момент инерции Земли $I = 2Mr_{\text{З}}^2/5$ оценим как эту величину для однородного шара массой $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг и радиусом $r_{\text{З}} \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м. Подставив численные значения, получим $L_{\text{З}} \approx 7 \cdot 10^{33}$ кг · м^2/с.

Итак, момент импульса, связанный с движением Луны, приблизительно вчетверо больше, чем момент импульса, связанный с вращением Земли. Но из-за приливов первый со временем увеличивается, а второй уменьшается. Так что Земля замедляет скорость своего вращения. А что Луна?

Изменение радиуса ее орбиты за время одного оборота, т.е. приблизительно за месяц, настолько незначительное, что движение можно считать круговым. (На самом деле Луна обращается вокруг Земли по эллипсу, но он очень близок к окружности.) Условие равенства силы притяжения Земли и Луны и центростремительной силы движения Луны по орбите:

$$m\omega^2 r = \frac{GmM}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, дает соотношение

$$\omega^2 r^3 = GM.$$

Отсюда нетрудно получить выражение

$$L_{\text{Л}} = m\omega r^2 = m\sqrt{GMr}.$$

Мы видим, что возрастание момента импульса Луны приводит к ее удалению от Земли, при этом уменьшается ее угловая скорость и, следовательно, увеличивается продолжительность периода обращения Луны, который мы называем месяцем.

Любопытное подтверждение этой теории дает исследование ископаемых кораллов. Американский ученый Дж.Уэльс обнаружил на них следы суточного цикла смены освещенности, а затем Г.Панелла и К.Мак-Клинток обнаружили еще и следы месячного цикла. В результате, исследуя окаменевшие кораллы разного возраста, ученым удалось узнать, во сколько раз продолжительность месяца превышала продолжительность дня в то время, когда росли эти кораллы. Оказалось, что для очень старых кораллов и месяц и сутки были меньше, чем теперь. Так что пару миллиардов лет тому назад Луна была ближе к Земле. Джордж Дарвин даже предположил, что она была оторвана от жидкой еще Земли центробежными силами. Давайте проверим эту гипотезу.

В то время, когда должно было произойти это событие, почти весь момент импульса системы Земля–Луна приходился на вращение Земли. Как мы уже прикинули, он приблизительно впятеро больше, чем момент импульса Земли сейчас. А так как размеры и масса Земли особо не менялись, это дает основание для вывода о том, что сутки в то время были почти впятеро меньше, чем теперь, и продолжались около 5 часов. Хорошо, но хватило бы такого вращения для того, чтобы от планеты оторвался кусок?

Легко видеть, что нет, не хватило бы. Если мы положим камень где-то на экваторе, то он сможет улететь в космос, только если скорость его вращения превысит первую космическую скорость. При движении спутника по особо низкой орбите, т.е. именно с этой минимальной скоростью, он делает полный оборот вокруг Земли где-то за 1,5–2 часа. А скорость даже быстрого вращения юной Земли обеспечивала бы один оборот за 5 часов, что недостаточно для того, чтобы оторвать часть вещества Земли. Вот и очевидный вывод: Луна не была оторвана от Земли центробежными силами.

В наше время гипотеза о том, что Луна оторвалась от Земли, опять стала актуальной, но с важным добавлением. Луна не оторвалась, а была выбита из Земли при гигантском столкновении с другой планетой, которую назвали именем титаниды Тейи, матери Гелиоса, Эос и богини Луны Селены. Удар Тейи пришелся почти по касательной по краю Земли и смог оторвать кусок, из которого и сформировался со временем наш естественный спутник. В пользу этой гипотезы говорят результаты геологического и изотопного исследований лунных пород.

Итак, с помощью несложных оценок нам удалось пролить свет на начало процесса удаления Луны. А чем он закончится? Да тем, что угловые скорости обращения Луны и вращения Земли сравняются друг с другом и Луна будет все время находиться над определенной стороной Земли, как сейчас сама Луна всегда повернута к Земле одной своей стороной. День и месяц сравняются по продолжительности и будут длиться около двух современных месяцев. Это можно узнать все из того же выражения для момента импульса. Надо положить в нем $\Omega = \omega$, приравнять его текущему значению момента импульса, получить уравнение, используя соотношение $\omega^2 r^3 = GM$, и решить его, хотя бы численно, с помощью компьютера.

Но можно и не решать, ведь нас интересует оценка, а не точная величина. Нетрудно догадаться, что при $\Omega = \omega$ практически весь момент импульса будет связан с обращением Луны. Так что по сравнению с существующим ее движением момент импульса должен будет вырасти на четверть. Поскольку эта величина пропорциональна $\sqrt{r}$, то средней радиус орбиты Луны должен возрасти в $1{,}25^2$ раза, а угловая скорость уменьшиться в $1{,}25^3$ раз. При этом длительность месяца (и равная ей длительность суток) увеличится по сравнению с нынешним месяцем в $1{,}25^3 \approx 2$ раза.

Закон Архимеда и закон сохранения энергии

С.ДВОРЯНИНОВ

Рассмотрим такую задачу. Пусть имеется полый внутри кубик с длиной ребра a, грани которого сделаны из прочной и очень тонкой фольги. Этот кубик плавает на поверхности воды так, что четыре его ребра вертикальны (рис.1). Кубик сместили вниз по вертикали

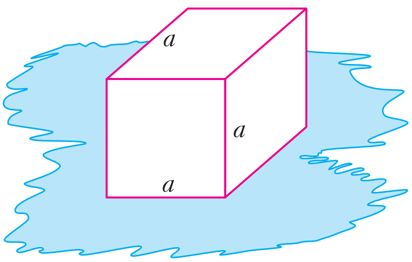


Рис. 1

на расстояние x, при этом часть его оказалась в воде. Считая массу кубика равной нулю, надо найти совершенную при этом работу.

Дать однозначный ответ к задаче о погружении кубика в воду нельзя. Оказывается, ответ зависит от того сосуда, в который налита вода. Обсудим несколько случаев.

Бак заполнен водой до самого верха

В этом случае при малейшем погружении нашего кубика вода будет из бака выливаться, но уровень воды в баке будет оставаться неизменным. От него и будет отсчитывать глубину погружения. Эта глубина H_1 соответствует расстоянию от уровня воды до нижней грани кубика и равна x (рис.2). При этом через край бака выльется вода, объем которой a^2x и масса $\rho a^2 x$. Вначале центр масс этой воды находился на глубине $x/2$, следовательно, работа, совершенная по подъему этой воды до верхнего края бака, равна

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20210505

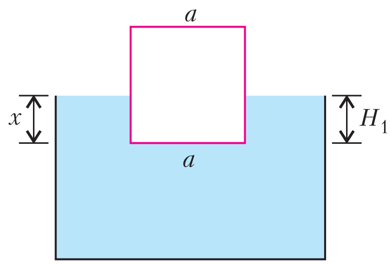


Рис. 2

приращению ее потенциальной энергии:

$$A_1(x) = E_{\text{п}1} = \rho a^2 x \cdot g \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\rho a^2 g x^2.$$

Сила, необходимая для погружения тела в воду, является переменной и зависит от глубины погружения, поэтому

$$\int_0^x F_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\rho a^2 g x^2.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, находим

$$F_1(x) = \rho a^2 g x.$$

Сила $F_1(x)$ – это сила, противодействующая выталкивающей силе, т.е. силе Архимеда $F_{\text{А}}$. (Сила тяжести на наше тело не действует, оно невесомо.) Сила Архимеда направлена вверх и численно равна силе тяжести воды, вытесненной кубиком из бака. В повседневной жизни силу тяжести чаще называют весом. Заметим, что в данном случае *вытесненная* вода – эта вода, *вылитая из бака*. Давление со стороны воды на нижнюю грань кубика равно

$$p(x) = \frac{F_1(x)}{S} = \frac{\rho a^2 g x}{a^2} = \rho g x.$$

Оно действует вверх.

Пусть глубина погружения стала равной a. При дальнейшем перемещении кубика вниз вода из бака выливаться не будет, сила

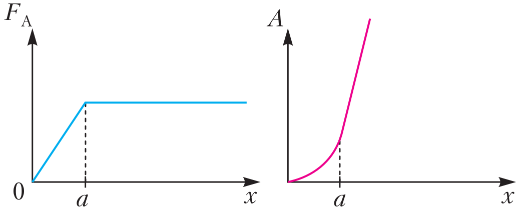


Рис. 3

Архимеда теперь будет оставаться постоянной и равной $F_{\text{А}} = \rho a^3 g$. Графики на рисунке 3 показывают, как от глубины погружения зависят сила Архимеда и необходимая для ее преодоления работа.

Если сила Архимеда равна весу плавающего на поверхности воды тела (т.е. силе тяжести тела), то медленное перемещение тела вдоль горизонтали с малой скоростью требует малой силы. Если тело целиком находится в воде, то легко осуществить его перемещение и по вертикали. Каждый знает это из личного опыта: при выходе на берег после продолжительного плавания в море особенно заметно, как легко можно было двигать руками и ногами в воде по сравнению с необходимыми усилиями на суше.

Выражение для работы A_1 можно получить и по-другому. Ясно, что в нашем случае вода, заполняющая параллелепипед $a \times a \times x$, поднялась на уровень бака. Мысленно разделим всю воду на очень узкие вертикальные столбики, практически на материальные отрезки. Медленный поворот каждого столбика на 90° и приведение его в горизонтальное положение не требует никакой работы. Но теперь получается, что каждую точку такого столбика-отрезка (т.е. весь отрезок целиком) надо поднять на одну и ту же высоту $x/2$. Это равносильно тому, что на эту высоту надо поднять всю массу воды $\rho a^2 x$. Для исходного параллелепипеда высота была переменной, своей для каждой точки.

Вода из бака не выливается

Рассмотрим бак с водой, имеющий форму параллелепипеда. Его основание – квадрат со стороной $a\sqrt{K}$, $K > 1$, а высота бака большая, так что даже при полном погружении кубика в воду вода из бака не выливается.

Назовем начальный уровень воды в баке нулевым. Пусть под действием силы, приложенной к кубику и направленной вертикально вниз, кубик сместился вниз от нулевого уровня на расстояние x и частично оказался в воде (рис.4). При этом кубик «вытеснил» воду, объем которой равен $a^2 x$ и которая распределилась выше нулевого уровня. Теперь площадь поверхности воды стала равной $(K-1)a^2$. Пусть уровень воды в баке

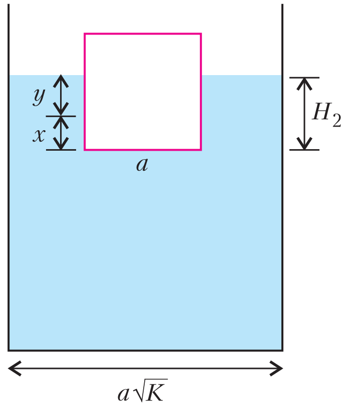


Рис. 4

повысился на величину y. Согласно закону сохранения объема получаем, что $(K-1)a^2 y = a^2 x$, откуда

$$y = \frac{x}{K-1}.$$

При этом от нового уровня воды в баке кубик погрузился на глубину

$$H_2 = x + y = \frac{K}{K-1}x.$$

Пусть верхняя грань кубика в воду еще не попала, т.е.

$$H_2 = \frac{K}{K-1}x < a.$$

Тогда центр масс вытесненной кубиком воды сместился вверх по вертикали на

$$h = \frac{x+y}{2} = \frac{K}{2(K-1)}x.$$

Потенциальная энергия вытесненной воды получила при этом приращение

$$E_{\text{п}2} = mgh = \frac{1}{2}\rho a^2 x \cdot g \cdot \frac{K}{K-1}x = \frac{1}{2}\rho a^2 g \frac{K}{K-1}x^2.$$

Именно такую работу

$$A_2(x) = \frac{1}{2}\rho a^2 g H_2 x = \frac{1}{2}\rho a^2 g \frac{K}{K-1}x^2$$

необходимо совершить для погружения кубика в воду на глубину x от начального уровня.

Работа A_2 зависит от x квадратичным образом: например, увеличение x в два раза требует вчетверо большей работы. С этим обстоятельством мы сталкиваемся на море или реке, когда пытаемся «утопить» резино-

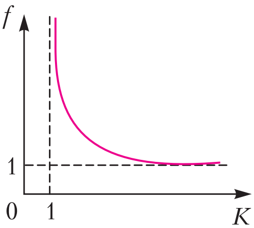


Рис. 5

вый мяч. А вот с зависимостью работы от параметра K, т.е. от площади «зеркала» бака, мы встречаемся нечасто. График функции $f(K) = \frac{K}{K-1}$ показан на рисунке 5. На бесконечном интервале $1 < K < +\infty$ эта функция убывает от $+\infty$ до 1.

Пусть бак с водой очень-очень узкий, чуть шире кубика, т.е. $K \to 1+0$. В этом случае работа по погружению кубика в воду очень велика. На большом озере, при $K \to +\infty$, эта работа оказывается наименьшей из всех возможных и равной работе силы тяжести жидкости, вытесненной кубиком. При этом считается, что уровень воды в озере не изменился.

Приобретенная потенциальная энергия возникла в результате работы переменной силы. То, что сила переменная, знаем из опыта: чтобы глубже погрузить плавающее на поверхности воды тело, надо приложить большую силу. Следовательно,

$$\int_0^x F_2(x)\,dx = \rho a^2 g \frac{K}{2(K-1)} x^2.$$

Дифференцируя, получаем

$$F_2(x) = \rho a^2 g \frac{K}{K-1} x.$$

Очевидно, что

$$F_2(x) = \rho a^2 g \frac{K}{K-1} x > F_1(x) = \rho a^2 g x.$$

Это неравенство означает, что во втором случае сила, необходимая для погружения кубика на глубину x от начального уровня, больше, чем в первом случае. Более того, эта требуемая сила может быть сколь угодно большой, если K достаточно близко к единице, т.е. если бак с водой достаточно узкий. Именно это обстоятельство используется при создании гидравлических машин, в частности гидравлических прессов. В этом случае получается такой парадоксальный результат. Пусть наш кубик – это «корабль», а бак с водой – это «море». Тогда на этом корабле можно разместить сколь угодно тяжелый груз и корабль не утонет. Для этого надо взять параметр K достаточно близким к единице. Только вот плыть такому кораблю некуда – он буквально зажат со всех сторон «морскими берегами».

В заключение еще раз вспомним глубину погружения кубика в воду $H_2 = \frac{K}{K-1} x$ и заметим, что на этой глубине на кубик действует сила

$$F_2(x) = \rho a^2 g H = \rho a^2 H \cdot g.$$

А это и есть сила Архимеда, равная весу воды, вытесненной кубиком. Подумайте, к какой части воды относится в данном случае прилагательное *вытесненная* и куда она *вытеснена*. Главная характеристика вытесненной воды – это ее объем, он всегда равен объему той части тела, которая находится в воде.

XLII Турнир городов

Задачи весеннего тура
Базовый вариант

8–9 классы

1 (4)[1] . Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?

Б.Френкин

2 (4). В треугольнике ABC провели высоты AX и BZ, а также биссектрисы AY и BT. Известно, что углы XAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

Жюри

3 (4). У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1001, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)

Жюри

4. а) (3) Можно ли разрезать квадрат на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?

б) (3) А можно ли разрезать равносторонний треугольник на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?

В.Расторгуев

5. На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры

а) (2) 100×101 клеток;

б) (4) 100×100 клеток?

Н.Чернятьев

[1] В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за пункты одной задачи суммируются).

10–11 классы

1. а) (2) Выпуклый пятиугольник разбили непересекающимися диагоналями на три треугольника. Могут ли точки пересечения медиан этих треугольников лежать на одной прямой?

б) (2) Тот же вопрос для невыпуклого пятиугольника.

А.Грибалко

2. а) (2) У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1000, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)

б) (2) Тот же вопрос, если у весов левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равенство, если масса на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.

А.Толпыго

3 (5). См. задачу М2650 «Задачника «Кванта».

4 (5). Как известно, квадратное уравнение имеет не более двух корней. А может ли уравнение $\left[x^2\right] + px + q = 0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней ($\left[x^2\right]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x^2)?

А.Толпыго

5 (6). Пусть O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, точка M – середина стороны AC. Прямая BO пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках H_a и H_c соответственно. Описанные окружности треугольников BH_aA и BH_cC вторично пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на прямой BM.

М.Евдокимов

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). Число $2021 = 43 \cdot 47$ составное. Докажите, что если в числе 2021 вписать сколько угодно восьмерок между 20 и 21, тоже получится составное число.

М.Евдокимов

2 (5). См. задачу М2651 «Задачника «Кванта».

3 (6). Треугольник ABC равносторонний. На сторонах AB и AC выбрали точки E и F, а на продолжении стороны AB – точку K так, что $AE = CF = BK$. Точка P – середина EF. Докажите, что угол KPC прямой.

В.Расторгуев

4 (7). Путешественник прибыл на остров, где живут 50 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Все аборигены встали в круг, и каждый назвал сначала возраст своего соседа слева, а потом возраст соседа справа. Известно, что каждый рыцарь назвал оба числа верно, а каждый лжец какой-то из возрастов (по своему выбору) увеличил на 1, а другой – уменьшил на 1. Всегда ли путешественник по высказываниям аборигенов сможет определить, кто из них рыцарь, а кто лжец?

А.Грибалко

5. В центре каждой клетки клетчатого прямоугольника M расположена точечная лампочка, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек, и зажечь все лампочки по какую-то одну сторону от этой прямой, если все они погашены. Каждым ходом должна зажигаться хотя бы одна лампочка. Требуется зажечь все лампочки, сделав как можно больше ходов. Какое максимальное число ходов удастся сделать, если

а) (4) M – квадрат 21×21;

б) (4) M – прямоугольник 20×21?

А.Шаповалов

6 (10). См. задачу М2652 «Задачника «Кванта».

7 (12). См. задачу М2653 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1 (4). См. задачу М2651 «Задачника «Кванта».

2 (5). Существует ли такое натуральное n, что для любых вещественных чисел x и y найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$x = a_1 + \ldots + a_n \text{ и } y = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}?$$

А.Соколов

3 (5). Точка M – середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC – в точке E. Пусть X и Y – середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается ω.

А.Доледенок

4 (8). В ряд лежат $100N$ бутербродов с колбасой. Дядя Федор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Федор за одно действие съедает один из крайних бутербродов. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Федор каждый ход делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Федор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются. Дядя Федор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина?

И.Митрофанов

5 (8). См. задачу М2652 «Задачника «Кванта».

6 (10). Найдите хоть одно вещественное число A со свойством: для любого натурального n расстояние от верхней целой части числа A^n до ближайшего квадрата целого числа равно 2. (Верхняя целая часть числа x – наименьшее целое число, не меньшее x.)

Д.Креков

7. Дано целое $n > 2$. На сфере радиуса 1 требуется расположить n попарно не пересекающихся дуг больших окружностей, все дуги равной длины α. Докажите, что

а) (6) при любом $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$ это возможно;

б) (7) при любом $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$ это невозможно.

И.Богданов

Устный тур для 11 класса

1. Каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ определена на всей числовой прямой и не является строго монотонной. Может ли быть, что и их сумма, и их разность строго монотонны на всей числовой прямой?

Д.Шноль

2. Петя и Вася по очереди красят ребра N-угольной пирамиды: Петя – в красный цвет, а Вася – в зеленый (ребро нельзя красить дважды). Начинает Петя. Выигрывает Вася, если после того, как все ребра окрашены, из любой вершины пирамиды в любую другую вершину ведет ломаная, состоящая из зеленых ребер. В противном случае выигрывает Петя. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

А.Глебов

3. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а T – точка касания этой окружности со стороной AC. Пусть P и Q – ортоцентры треугольников BAI и BCI соответственно. Докажите, что точки T, P, Q лежат на одной прямой.

Фольклор

4. См. задачу М2656 «Задачника «Кванта».

5. Полиция задержала 50 человек, из которых 35 – преступники, которые говорят, что захотят, а 15 – свидетели, которые всегда говорят правду. Все задержанные знают, кто преступники. Какое наименьшее число человек достаточно выбрать, чтобы, спросив потом у каждого, кто именно преступники, по ответам вычислить хотя бы одного преступника?

А.Аржанцев

6. Существует ли описанный 2021-угольник, все вершины и центр вписанной окружности которого имеют целочисленные координаты?

М.Евдокимов

Публикацию подготовили Е.Бакаев, И.Богданов, А.Грибалко, М.Дидин, С.Дориченко, М.Евдокимов, А.Заславский, П.Кожевников, А.Кушнир, Э.Лю, М.Малкин, Л.Медников, В.Ретинский, А.Тертерян, А.Толпыго, Б.Френкин, И.Фролов

К «Калейдоскопу «Кванта»

На рисунках на страницах 32–33 изображены механизмы, изобретенные П.Л.Чебышёвым.

1. Стопоходящая машина.
2. Сортировалка.
3. Самокатное кресло.
4. Арифмометр. Первая модель.
5. Центробежный регулятор.
6. Весы.
7. Велосипед.
8. Паровая машина.
9. Зубчатая передача.
10. Стопоходящая машина. Железная модель.
11. Пресс.
12. Механизм с изменяемым ходом.
13. Эпициклоидная передача арифмометра.
14. Механизм кулисы паровой машины.
15. Многозвенный механизм с остановками в крайних положениях.
16. Механизм с длительной остановкой ведомого звена в конце его хода.
17. Механизм с остановками в крайних положениях.
18. Механизм для преобразования вращательного движения в качательное.
19. Механизм для преобразования вращательного движения в поступательное с ускоренным обратным ходом.
20. Парадоксальный механизм.
21. Механизм, дающий два качания ведомого звена за один оборот кривошипа.
22. Шестизвенная противовращательная рукоятка.
23. Механизм с остановкой ведомого звена на полпути.
24. Механизм противовращательной рукоятки с остановкой ведомого звена.
25. Механизм, направляющий по дуге окружности.

tcheb.ru

На сайте tcheb.ru эти механизмы можно посмотреть в движении.

Очередной набор в ВЗМШ

ВЗМШ
ВСЕРОССИЙСКАЯ ЗАОЧНАЯ МНОГОПРЕДМЕТНАЯ ШКОЛА

Наши контакты:
https://vzms.ru/
https://lycuz2.mskobr.ru/
+7(926)280-28-20
vzms2015@mail.ru
(почта, прием)
https://vk.com/vzmsh
119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, Второй учебный корпус, ауд. 307

Всероссийская заочная многопредметная школа приглашает школьников и учителей из всех регионов России, ближнего и дальнего зарубежья для обучения по программам дополнительного дистантного (он-лайн) образования.

ВЗМШ – старейший в России центр дополнительного образования. Она была основана в 1964 году по инициативе выдающихся математиков, академиков И.Г.Петровского (в то время ректора МГУ) и И.М.Гельфанда. В настоящее время ВЗМШ – структурное подразделение знаменитого московского физико-математического «Лицея «Вторая школа».

Мы учим математике, физике, биологии, русскому языку и литературе, истории, обществознанию. Наши преподаватели – это сотрудники МГУ имени М.В.Ломоносова и других ведущих вузов и академических институтов. Ими написана обширная библиотека уникальных учебных пособий по математике, истории, обществознанию и другим предметам. Созданные ими методики позволяют вести заочное (он-лайн) обучение на самом высоком уровне.

Обучение старшеклассников в ВЗМШ направлено прежде всего на подготовку к олимпиадам и ЕГЭ. Однако мы считаем, что даже самая высокая оценка не может быть самоцелью. У нас занимаются прежде всего такие ученики, для которых на первом месте стоит саморазвитие, которые хотят знать СВЕРХ ТОГО, сверх школьной программы, и приобрести дополнительные знания по самым разным предметам.

ВЗМШ окончили более 200 тысяч школьников. Из их рядов вышло множество ученых, исследователей, педагогов. Многим учеба в ВЗМШ помогла лучше ориентироваться в жизни, ставить перед собой большие задачи, добиваться задуманного.

ВЗМШ, в отличие от курсов или кружков, это самая настоящая школа, со своей программой, ритмом, контрольными работами, двусторонней связью между учеником и учителем. Мы предоставляем наши материалы в электронном виде, постоянно общаемся с нашими учениками через социальные сети, рассказываем им о том, что не входит в программу обучения, но помогает их развитию, знакомим с книгами и статьями наших преподавателей, проводим видеоконференции и видеолекции.

В ВЗМШ существует особая форма работы – группа «Коллективный ученик». Это группа школьников, работающая по методическим пособиям ВЗМШ под руководством школьного учителя по тем же программам и пособиям, что и индивидуальные ученики. В помощь учителям – кураторам таких групп – разрабатываются специальные методические и учебные материалы. Ученики под руководством учителя вместе обсуждают пройденный материал, полученные задания. Сотрудничество с ВЗМШ, как показывает наш многолетний опыт, многие учителя воспринимают и как свою собственную учебу.

Обучение в формате «Коллективный ученик» имеет следующие преимущества: контакт с учителем упрощает обучение, что особенно важно для тех школьников, которым сложно самостоятельно, без наставника, организовать свое время; совместные занятия создают творческую атмосферу, в которой есть место и для конкуренции, и для кооперации; присылаемые из ВЗМШ материалы могут служить учителю хорошей базой для организации в школе кружка или факультатива, помогают подготовить учеников к участию в олимпиадах и сдаче ЕГЭ; ученики принимаются в ВЗМШ без выполнения вступительного задания; плата за обучение одного ученика меньше, чем при индивидуальном обучении.

Подробно ознакомиться с программами обучения, зарегистрироваться, выполнить вступительные задания, а также подать заявку для группы «Коллективный ученик» можно здесь: math-vzms.org

Приступить к обучению можно в любое время!

Расскажем подробнее о наших отделениях и приведем условия соответствующих вступительных работ.

Ответы отправьте нам любым удобным способом: электронной почтой, простым письмом или с помощью обратной связи на нашем сайте. Не забудьте представиться и указать свой адрес и возраст. Требуются лишь базовые знания – не беспокойтесь, если вы решили не все задачи.

Отделение математики

Будущих математиков мы обучаем работать с научными текстами, четко излагать свою мысль, предоставляем возможность, используя наши пособия, продвинуться в изучении различных математических вопросов настолько далеко по сравнению с необходимым минимумом, насколько они сами этого захотят.

Мы помогаем углубить и расширить полученные в школе знания, подготовиться к ЕГЭ, ОГЭ и прочим экзаменам.

Тем, кому уже ведомо удовольствие от решения математических задач, мы надеемся доставить радость от размышления над новыми, похожими и вовсе не похожими на прежние, задачами.

Мы последовательно обучаем школьников с 4 по 11 класс. Начать обучение можно с любого класса.

Вступительная работа

Рядом с порядковым номером задачи в скобках указано, ученикам какого класса эта задача предназначается (имеется в виду тот класс, в котором вы будете учиться в следующем учебном году). Вы можете, если хотите, дополнительно решать задачи, адресованные более старшим классам.

Возможно, вы не сможете решить все задачи своего класса, присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои решения, «голый» ответ к задаче решением не считается.

1. (5 кл.) Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того, как Чип принес 120, а Дейл – 147 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза больше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?

2. (5 кл.) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие – втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 648 метров. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

3. (5 кл.) Известно, что в январе четыре пятницы и четыре понедельника. На какой день недели приходится 1 января?

4. (6 кл.) На поляну прилетело 35 ворон. Неожиданно вороны взлетели и разделились на две стаи: одна стая уселась на ветви старой березы, а другая – на ольху. Через некоторое время с березы на ольху перелетело 5 ворон, столько же ворон совсем улетело с березы, после чего на березе осталось вдвое больше ворон, чем на ольхе. Сколько ворон было в каждой из двух стай первоначально?

5. (6 кл.) На карточках были написаны числа 1, 2, 3, …, 111. Ваня взял себе карточки с четными номерами, а Таня – с нечетными. У кого из них сумма чисел на карточках получилась больше и на сколько?

6. (6 кл.) На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Разбейте его на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки так, что суммарная длина проведенных отрезков не превосходит 16 клеток.

7. (7 кл.) Иннокентий хочет записать по кругу 2015 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Его друг Макар утверждает, что это невозможно. Кто прав?

8. (7 кл.) В правильном 2018-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

9. (7 кл.) У юного художника была одна банка синей и одна банка желтой краски, каждой из которых хватает на покраску 38 дм^2 площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зеленая трава и желтое солнце. Зеленый цвет он получал, смешивая две части желтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на 6 дм^2 больше, чем площадь неба?

10. (8–10 кл.) Два города A и B расположены на берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга. Пароход может проплыть из A в B и обратно за 1 час. Больше или меньше времени понадобится ему, чтобы проплыть 20 км по озеру?

11. (7–10 кл.) а)Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одной и той же?

б) Аналогичный вопрос, если расставлять по ребрам куба числа –6, –5, –4, –3, –2, –1, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

12. (8–11 кл.) Найдите целые числа x и y такие, что $x > y > 0$ и $x^3 + 7y = y^3 + 7x$.

13. (9–11 кл.) Разложите на множители:

а) $x^8 + x^4 + 1$ (на три множителя);

б) $x^5 + x + 1$ (на 2 множителя).

14. (8–11 кл.) В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

15. (9–11 кл.) а) Докажите, что при $a > 0$ $1 + \frac{1}{a} \geq 2$.

б) Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

16. (9–11 кл.) Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Определите, какой знак имеет число c.

17. (9–11 кл.) Можно ли восстановить треугольник по серединам его сторон? А четырехугольник? Любой ответ требует доказательства!

Отделение физики

Если вы интересуетесь физикой, хотите понять ее немножко глубже, чем объясняют в школе, собираетесь изучать физику в вузе – поступайте к нам!

Мы объясняем, как решать типичные для ЕГЭ задачи (в том числе повышенной сложности), рассказываем о математических методах современной физики и многих других вопросах, которые остаются за рамками школьной программы.

Мы предлагаем программы обучения различной длительности и уровня сложности для школьников 9–11 классов: 9-классники учатся три года (курс Ф3), 10-классники – два (курс Ф2), 11-классники – один (курс Ф1). У нас есть и программа углубленного изучения физики для 11-классников (курс Ф0).

На ближайший учебный год приема на физическое отделение нет.

Отделение биологии

Цель биологического отделения – помочь школьникам углубить и расширить свои знания, а также познакомиться с современными методами и достижениями науки.

Программа биологического отделения включает в себя наиболее интересные темы, которым в базовом школьном курсе уделяется мало внимания: это физиология растений, цитология и генетика, теория систематики, физиология человека и животных и некоторые другие разделы.

Наши пособия и учебные материалы в первую очередь приучают школьников к самостоятельной творческой работе, дают им возможность приобретения навыков письменного изложения своих мыслей, выдвижения и критического анализа различных гипотез, работы с биологической литературой. Каждый учащийся биологического отделения получает куратора, который проверяет работы и отвечает на возникшие вопросы, а также помогает школьнику увидеть свои слабые места и их скорректировать. Это обеспечивает получение школьниками информации «из первых рук», знакомство с фактами и теориями, которые еще не успели войти в школьные учебники.

В зависимости от класса – 8 или 9 – школьники учатся на биологическом отделении ВЗМШ 2 или 3 года. Закончившие 8 классов поступают на 1 курс, а 9 классов – на 2, по окончании 3 курса все ученики, выполнившие программу обучения (по схемам 1–2–3 или 2–3), получают диплом об окончании биологического отделения ВЗМШ.

Вступительная работа

1. Составьте определитель (в форме тез и антитез) овощей, продающихся в магазине, по внешнему виду, собрав в нем десяток видов, наиболее типичных для вашей местности. Включать в определитель полные описания не нужно – только те признаки, которые реально могут быть использованы для отличия одних овощей из вашей выборки от других.

2. На океаническом дне обитают представители самых разных групп животных. Какие приспособления к такому образу жизни у них возникли? Для каждого из указанных вами приспособлений приведите по одному-два примера животных, у которых оно имеется.

3. При разведении животных в неволе имеет место эффект так называемого «вырождения» – уменьшения жизнеспособности из-за близкородственного скрещивания. Интересно, что у разных видов животных вырождение наступает с разной скоростью – в то время как одним видам хватает нескольких поколений, чтобы начать вырождаться, у других маленькие близкородственные популяции могут существовать достаточно долго. Как можно объяснить это явление? С какими особенностями вида может быть связано быстрое или медленное вырождение?

4. Апоптоз – запрограммированная клеточная гибель. Когда клетка получает сигнал к запуску апоптоза, она фактически оканчивает жизнь самоубийством. Подумайте: в каких случаях это может быть полезно для организма? С какими проблемами столкнется человек, если механизм апоптоза в его клетках отключится?

5. В настоящее время на наших глазах разворачивается пандемия нового коронавируса. Расскажите, как вы понимаете:

а) чем этот вирус опаснее предыдущих;

б) как быстро может появиться лекарство, помогающее в случае нового заболевания или предупреждающее его;

в) какие меры могут быть приняты для предотвращения или замедления эпидемии.

Отделение филологии

Мы помогаем желающим систематизировать и углубить имеющиеся знания, расширить свой кругозор, приобрести навыки исследовательской работы.

Объект нашего интереса, внимания и исследования, конечно же, Слово. Родное и «чужое», «претворенное» метафорой, образное и терминологически точное. Как правильно написать и к месту использовать; как учесть системные связи; как увидеть и оценить уникальность работы со Словом великих Мастеров? Сколько с ним проблем – у многих, и как приятно встретить к нему интерес – пусть у некоторых! Наши курсы будут полезны и тем, и другим.

Прагматики смогут повысить грамотность, научиться решать олимпиадные лингвистические задачи, подготовиться и хорошо сдать ЕГЭ. Те же, кто получает удовольствие от общения с художественным текстом, научатся размышлять над поэзией и прозой русских классиков и писать сочинения, отвечающие требованиям ДВИ (дополнительных вступительных испытаний) филологических факультетов вузов.

Ученик филологического отделения находится в постоянном взаимодействии со своим преподавателем, который в рецензии к работе обязательно дает рекомендации, как улучшить результат, а при необходимости индивидуально подбирает дополнительные задания для отработки темы или литературу для более глубокого понимания исследуемого материала.

Вступительная работа

1. Подумайте и напишите, что не так с выражениями: *остался за бортом разбитого корыта; довести до белого колена; заморить червячков; ни зги не брезжит; ни слуху ни пера; скрипя сердцем; шито-крыто белыми нитками; не в коне корм*.

2. Почему зайчишка имеет окончание – А, как мыслишкА, а домишко – О, как золотишкО?

3. Определите часть речи: (НА)ВСТРЕЧУ, ОЗАБОЧЕ(Н/НН)О. Придумайте предложения, которые помогут доказать вашу точку зрения.

4. Вспомните трех героев русской литературы с «говорящими» фамилиями. Предложите для каждого из них две другие, тоже «говорящие» об их свойствах и качествах, и объясните свой выбор.

5. В приведенном ниже отрывке из пушкинского «Евгения Онегина» найдите аллитерацию и попытайтесь объяснить: зачем автор использует этот фонетический прием, почему именно так?

Бывало,
Когда гремел мазурки гром,
В огромной зале все дрожало,
Паркет трещал под каблуком,

Тряслися, дребезжали рамы;
Теперь не то: и мы, как дамы,
Скользим по лаковым доскам.
Но в городах, по деревням
Еще мазурка сохранила
Первоначальные красы:
Припрыжки, каблуки, усы...

Отделение истории

Обучение на историческом отделении позволит расширить кругозор, подготовиться к олимпиадам по истории, получить высокий балл по ЕГЭ, ОГЭ и другим экзаменам.

Каждый раздел курса посвящается определенному периоду российской истории, сопровождается множеством иллюстраций, историческими документами, сводами дат, династическими таблицами, которых не найдешь в обычном учебнике. Такие материалы помогут не просто запомнить пройденное, но и понять содержание эпохи. Ведь мы учим не просто запоминать, но и размышлять!

На каждое выполненное задание мы даем свой комментарий: ученик не просто знает, правильно ли он ответил, а узнает, почему верен или неверен именно такой ответ.

Мы рекомендуем лучшие учебники и пособия, но предлагаем свой, оригинальный, проверенный временем курс. На нашем форуме можно задавать вопросы преподавателям. Отвечают они незамедлительно.

Программа обучения рассчитана на школьников старших классов.

Вступительная работа

1. Сколько правительниц государства насчитывает история России?

2. Какой сборник законов из ниже перечисленных был первым, изданным массовым тиражом?

а) Судебник Ивана III.
б) Судебник Ивана IV.
в) Соборное Уложение.
г) Воинский артикул Петра I.

3. Почему в совхозе был директор, а в колхозе председатель?

Отделение обществознания

Когда наук много, а предмет один – это обществознание. Наш курс нацелен на подготовку к ЕГЭ, ОГЭ, олимпиадам по этому предмету и входящим в его состав дисциплинам, в том числе по экономике, праву, политологии, социологии, философии. Он будет интересен и тем, кто просто хочет стать разносторонне образованным человеком.

Задания ЕГЭ по обществознанию, особенно второй части этого экзамена, задания олимпиад, очень сложные. Поэтому мы объясняем каждый ответ (неважно, верен он или нет), а не просто ставим баллы за его выполнение.

Особое место мы уделяем самому сложному заданию экзамена – написанию эссе. Только такая обратная связь позволяет вдумчиво и полноценно подготовиться к любым экзаменам. Эту же цель преследует форум, на котором ученики могут задать любой вопрос преподавателю. Кроме того, с преподавателем можно связаться через WhatsApp.

Программа обучения рассчитана на школьников старших классов.

Вступительная работа

1. Какая республика – субъект Российской Федерации – имеет территориальную основу?

2. Какая форма правления существовала в России с апреля 1906 по март 1917?

а) Абсолютная монархия.
б) Дуалистическая монархия.
в) Сословно-представительная монархия.
г) Теократическая монархия.
д) Традиционная монархия.

3. В стране Ухляндии в 2016 году фирма «Грейдер», используя экскаватор и прочую технику, вырыла, во исполнение контрактных обязательств, канаву длиной в один километр и шириной в один метр, за что получила от заказчика оплату в размере 2000 рыжиков (рыжики – ухляндская валюта). В 2017 году также по заданию заказчика она эту канаву зарыла, на чем заработала 3000 рыжиков. На сколько изменился в результате этих двух операций валовой внутренний продукт Ухляндии, если учесть, что он изменяется по состоянию на конец каждого года?

а) Вырос на 2000 рыжиков.
б) Вырос на 3000 рыжиков.
в) Упал на 1000 рыжиков.
г) Не изменился.
д) Вырос на 5000 рыжиков.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №4)

1. $\frac{4}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{20}{21}$, $\frac{4}{3}:\frac{7}{5}=\frac{20}{21}$, $\frac{9}{7}-\frac{1}{3}=\frac{20}{21}$, $\frac{4}{6}+\frac{2}{7}=\frac{20}{21}$.
Есть и другие примеры. Интересно, что в последнем задании не удается обойтись несократимыми дробями.

2. а) Представим себе, что кубик сложен из восьми единичных кубиков, и посмотрим на кубик, закрашенный на рисунке 1. Что бы Буратино ни написал на его нижней грани, требование Мальвины будет нарушено. Если там будет крестик, то нолик на его передней грани будет граничить с тремя крестиками. Если там будет нолик, то крестик на боковой грани будет граничить с тремя ноликами.

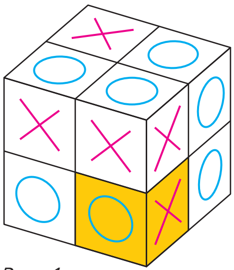


Рис. 1

б) Существуют (с точностью до поворотов куба) три различные расстановки крестиков и ноликов. Можно (рис.2) на верхней грани нарисовать нолики, на нижней крестики, а боковые грани разметить «слоями». Второй способ (рис.3) заключается в том, чтобы представить себе куб сложенным из восьми единичных кубиков (на четырех из которых нарисованы только крестики, а на четырех только нолики) в шахматном порядке. Наконец, третий способ представлен на рисунке 4. Невидимые грани будут размечены «противоположно» видимым: в клетках, симметричных клеткам с крестиками относительно центра кубика, стоят нолики, и наоборот.

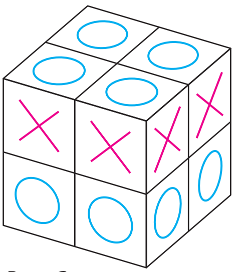


Рис. 2

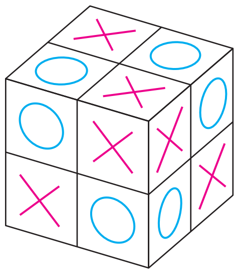


Рис. 3

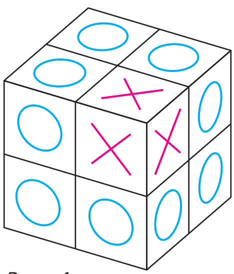


Рис. 4

3. 5 минут.
Давайте на одном мониторе запустим получившийся ролик, а на другом – Петино видео целиком с конца. Тогда мониторы будут показывать разное, пока братья не окажутся в одной точке пути, а после этого они будут показывать одно и то же. Поэтому длительности таких двух видео равны.

4. 21.
Первое решение. Пусть прямоугольник занимает a клеток по вертикали и b клеток по горизонтали, $a+b=50:2=25$ (рис.5). Аналогично, пусть размеры дырки равны x клеток по вертикали и y по горизонтали, $x+y=32:2=16$. Если бы дырки не было, было бы a горизонтальных полосок. Дырка разрезает x из них на две части, так что всего горизонтальных полосок $a+x$, что по условию равно 20. Аналогично, вертикальных полосок будет $b+y$. Но $a+b+x+y=25+16=$ $=41$ и $a+x=20$. Значит, $b+y=41-20=21$.

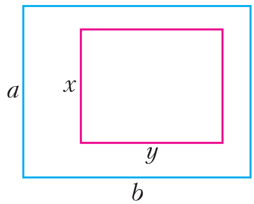


Рис. 5

Второе решение. Для каждой горизонтальной полоски отметим ее левую и правую стороны, а для каждой вертикальной – верхнюю и нижнюю. Ясно, что мы по одному разу отметили все границы клеток на контуре прямоугольника и контуре дырки, т.е. $50+32=82$ границы. Каждая полоска давала нам по две границы, так что всего полосок $82:2=41$. Горизонтальных среди них 20, значит, вертикальных 21.
Комментарий. Второе решение более общее – оно работает и в том случае, когда фигура и дырка имеют сложную многоугольную форму (рис.6).

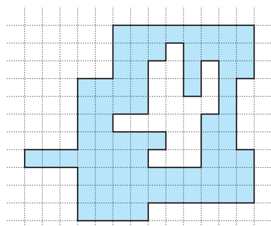


Рис. 6

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №3)

25. 45°.
В треугольниках обязательно встретится угол 45° – это может быть как угол CBK, так и угол BCK.
Рассмотрим два случая.
Если $\angle BCK\neq 45°$, то прямые AK и CK не совпадают, поэтому K лежит на их пересечении (рис.7). Эти прямые симметричны относительно диагонали

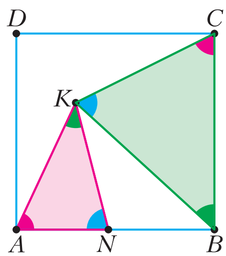


Рис. 7

BD, так как $\angle BAK = \angle BCK$, поэтому K лежит на BD, а значит, $\angle ABK = 45°$.
Если же $\angle BCK = 45°$, то точка K не обязательно лежит на диагонали BD. Но это неважно, так как мы уже обнаружили в треугольниках угол в 45°.

26. Число синих граней четно (по 6 на каждом синем кубике). Внутри куба находится нечетное число синих граней, потому что это удвоенное число пар соседних синих кубиков плюс число изолирующих квадратиков. Значит, на поверхности нечетное число синих граней. Если бы красных граней было столько же, то общее число квадратиков на поверхности не делилось бы на 4, но оно равно 600, противоречие.

27. 8.
Введем координаты так, чтобы оси шли вдоль линий сетки и единичный отрезок был равен стороне клетки. Точка пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ имеет координаты $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$. Эта точка является узлом в том и только в том случае, когда обе суммы $x_1 + x_2 + x_3$ и $y_1 + y_2 + y_3$ делятся на 3.
Это соображение позволяем нам перейти к рассмотрению остатков при делении на 3 координат всех узлов набора. Всего есть 9 возможных пар остатков, расположим их в виде таблицы 3×3 (рис.8). Будем класть в ячейку таблицы фишку для каждого узла, координаты которого при делении на 3 дают такие остатки.

(0,2)	(1,2)	(2,2)
(0,1)	(1,1)	(2,1)
(0,0)	(1,0)	(2,0)

Рис. 8

В наборе, подходящем под условие задачи, не может быть трех фишек, обе суммы координат которых делятся на 3. Сумма трех чисел делится на 3 в том и только в том случае, когда либо все три слагаемых дают одинаковые остатки при делении на 3, либо все они дают три разных остатка при делении на 3. Поэтому запрещены следующие ситуации (и только они):
(1) в одной клетке лежат три фишки;
(2) в каждой клетке ряда (строки или столбца) лежит по фишке;
(3) по фишке лежит в трех клетках, расположенных в трех разных строках и трех разных столбцах.
Пример. Можно положить 8 фишек: по 2 в ячейки левого нижнего квадрата 2×2. Нетрудно проверить, что запреты не нарушаются. Приведем конкретное расположение точек на плоскости, дабы убедиться, что их действительно можно расставить так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой (рис.9).

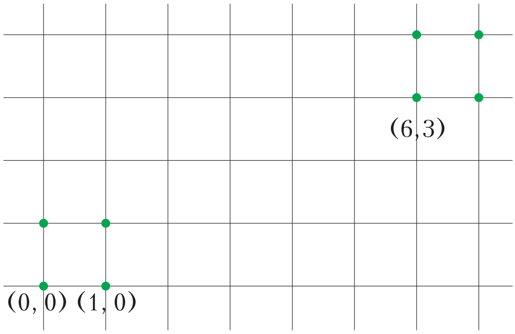


Рис. 9

Оценка. Покажем, что 9 фишек в таком наборе быть не может (а тогда, очевидно, не может быть и больше 9 фишек). Докажем от противного: предположим, что существует набор, подходящий под условие задачи, в котором точек хотя бы 9.
Обратимся к списку запретов. Заметим, что если в таблице менять местами строки или столбцы, то тройка фишек, нарушающая запрет, продолжает нарушать тот же запрет. Это наблюдение позволит нам рассуждать о расположении фишек в квадрате, не проводя перебор.
Мы раскладываем не менее 9 фишек, поэтому из запрета (1) следует, что всего занято хотя бы 5 клеток. Поэтому найдется строчка, в которой занято фишками хотя бы 2 клетки; при этом из запрета (2) следует, что в ней занято ровно 2 клетки. Переставим строки так, чтобы эта строка стала первой, а столбцы переставим так, чтобы пустая клетка в ней была справа (на рисунке 10 занятые клетки обозначены плюсом, пустые – минусом).

+	+	−

Рис. 10

Так как во всем квадрате 3×3 занято не меньше 5 клеток, то в левом нижнем квадрате 2×2 занята хотя бы одна клетка. Поменяем, если нужно, между собой вторую и третью строки, а также первый и второй столбцы так, чтобы эта клетка попала в левую клетку второй строки (рис.11).

a +	*b* +	*c* −
d +	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Рис. 11

Обозначим клетки буквами. Из запретов (2) и (3) следует, что раз клетки a, b и d заняты, то клетки g и i пустые. Так как всего занято хотя бы 5 клеток, то среди оставшихся клеток e, f и h хотя бы две заняты. Тогда одна из троек фишек в клетках $b-e-h$, $d-e-f$ или $a-f-h$ нарушает запрет.

28. 2^{49}.

Рассмотрим хорошую последовательность. Поставим между соседними числами запятые. Представим каждое число в виде суммы единиц – например, вместо 3 напишем $1+1+1$. Получим строчку из ста единиц, между соседними единицами стоит плюс или запятая. Например, из последовательности 3, 1, 4 получится

$$1+1+1,\ 1,\ 1+1+1+1$$

Всего знаков (плюсов и запятых) 99, из них 49 запятых. Пронумеруем эти знаки от 1 до 99. Разобьем их на пары 1–51, 2–52, 3–53, …, 49–99; без пары останется знак с номером 50. Знак с номером 50 не запятая, так как тогда можно было бы выбрать до этой запятой все числа, их сумма как раз равна 50. В парах не могут оба знака быть запятыми – иначе можно выбрать все числа между ними, их сумма равна 50. Всего запятых ровно 49, значит, в каждой паре ровно одна запятая. Заметим, что если это условие выполняется, то нет двух запятых, между которыми ровно 50 единиц. Поэтому количество хороших последовательностей равно количеству способов выбрать из этих 49 пар по одному знаку, который будет запятой, так что ответ 2^{49}.

XLII Турнир городов

Задачи весеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. Может.

Например, $(8!-4)+(8!-3)+\ldots+8!+\ldots+(8!+4)=$ $=9\cdot 8!=9!$. См. также задачу М2650 «Задачника «Кванта».

2. Не обязательно.

Например, нетрудно проверить, что в треугольнике с углами $\angle A=30°$, $\angle B=90°$, $\angle C=60°$ оба указанных угла равны 15°.

Замечание. Годится любой треугольник с углом C, равным 60°.

3. Может.

Первые три взвешивания такие: разбиваем гири на две пары способом, который еще не встречался, и сравниваем их. Разных способов как раз три. Мы получим равенство для пар 1001, 1005 и 1002, 1004. При этом только гиря 1001 в двух других взвешиваниях была в «легкой» паре и только гиря 1005 в двух других взвешиваниях была в «тяжелой» паре – так находим их. Оставшиеся две гири 1002 и 1004 различаем четвертым взвешиванием.

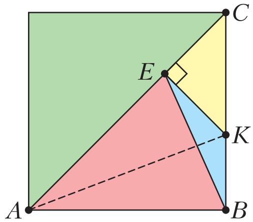


Рис. 12

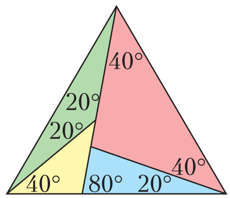


Рис. 13

4. Можно в обоих пунктах, см. рисунки 12 и 13. На рисунке 12 сначала проводим биссектрису AK угла BAC, а затем отражаем точку B относительно AK и получаем точку E.

5. а) Не всегда.

На рисунке 14 показано расположение доминошек на доске 6×7, которое не позволяет пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю: имеется единственный путь по доске, идущий из нижней левой клетки, и он в итоге упирается в последнюю вертикальную доминошку.

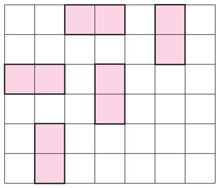


Рис. 14

Эта конструкция обобщается на любую доску размера $2n\times(2n+1)$.

б) Всегда.

Начальная и конечная клетки лежат на главной диагонали доски и имеют «координаты» $(1,1)$ и $(100,100)$. Докажем, что в любую свободную клетку этой диагонали можно попасть.

Действительно, пусть мы дошли до клетки (n,n). Если клетка $(n+1,n+1)$ свободна, то хоть одна из клеток $(n,n+1)$ и $(n+1,n)$ не занята и через нее можно пройти на клетку $(n+1,n+1)$.

Если же клетка $(n+1,n+1)$ занята, то из ее соседей занята ровно одна клетка, причем по стороне, поэтому один из двух путей из (n,n) в $(n+2,n+2)$ не закрыт.

10–11 классы

1. а) Не могут; б) могут.

Ясно, что проведено ровно две диагонали, причем они выходят из одной вершины, пусть из A. Тогда указанные точки пересечения медиан получаются гомотетией с центром A и коэффициентом 2/3 из середин сторон BC, CD и DE.

а) Эти середины сторон не могут лежать на одной прямой, так как прямая, не содержащая сторону выпуклого многоугольника, может пересечь его границу не более чем в двух точках.

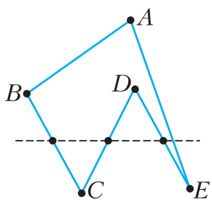


Рис. 15

б) Эти середины сторон могут лежать на одной прямой, как показано на рисунке 15.

2. а) Не может.

Как бы Таня ни помещала гири на весы, равновесия они никогда не покажут. Поэтому каждое взвешивание делит множество подозрительных перестановок не более чем на две части. Вначале было 24 подозрительные перестановки, после первого взвешивания при «неудачном» исходе их останется не меньше 12, после второго – не меньше 6, …, после четвертого – не меньше 2.

б) Может.

Сначала положим на чаши по две гири. В результате гири разбиваются на две пары: легкую и тяжелую (если весы показали равновесие, то, как мы знаем, более тяжелая группа – на левой чаше). Есть три варианта: легкая пара – гири 1000, 1002, тяжелая – 1004, 1005; легкая пара – 1000, 1004, тяжелая – 1002, 1005; легкая пара – 1000, 1005, тяжелая – 1002, 1004. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвертым взвешиванием сравним более тяжелые гири обеих пар, положив на левую чашу гирю из тяжелой пары. В первом варианте перевесит левая чаша, в третьем – правая, а во втором весы покажут равновесие (на левой чаша 1005, на правой 1004).

4. Может.

Рассмотрим, например, уравнение $\left[x^2\right]-100x+2500=0$. Оно имеет 199 корней вида $50+\frac{k}{100}$ (где $k=-99,-98,\ldots,99$). Действительно,

$$\left[\left(50+\frac{k}{100}\right)^2\right]=\left[2500+k+\left(\frac{k}{100}\right)^2\right]=$$

$$=2500+k=100\cdot\left(50+\frac{k}{100}\right)-2500.$$

Замечание. Поясним неформально, как можно было придумать решение задачи.

Поскольку $\left[x^2\right]=x^2-\left\{x^2\right\}$, исходное уравнение можно переписать в виде $x^2+px+q=\left\{x^2\right\}$. Будем решать его графически: искать пересечения графиков параболы и дробной части квадрата. График дробной части $y=\{x\}$ представляет собой ряд равномерно идущих наклонных полуинтервалов (рис.16).

Аналогично, график $y=\left\{x^2\right\}$ состоит из кусочков параболы: мы разрезаем параболу $y=x^2$ горизонтальными прямыми вида $y=n$, где $n=0,1,2,\ldots$, на кусочки и каждый кусочек параллельно сдвигаем вниз к оси абсцисс. Но эти кусочки идут уже не равномерно, а «чем дальше от нуля, тем все чаще» (ведь при стремлении x к бесконечности ордината возрастает на 1 при увеличении x на все меньшее (стремящееся к 0) число (рис.17).

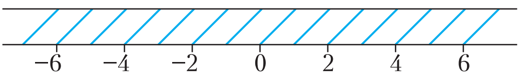


Рис. 16

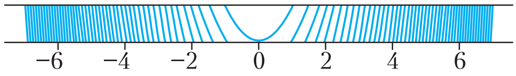


Рис. 17

Но тогда любое уравнение вида $(x-a)^2=\left\{x^2\right\}$ с достаточно большим a годится: в окрестности своей вершины парабола $y=(x-a)^2$ пересечет много кусочков графика $y=\left\{x^2\right\}$.

5. Пусть BD – диаметр описанной окружности треугольника ABC (рис.18). Поскольку $\angle ADB=\angle C$, имеем

$$\angle CAH_a=\angle CAA_1=90^\circ-\angle C=90^\circ-\angle ADB=\angle ABH_a.$$

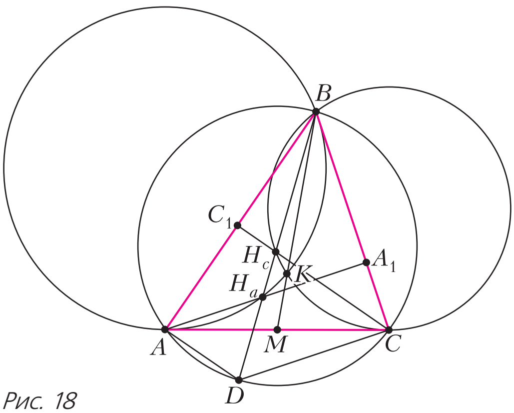


Рис. 18

Следовательно, сторона AC касается описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она касается описанной окружности треугольника BH_cC. Как известно, радикальная ось BK этих двух окружностей проходит через середину M отрезка AC их общей касательной.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Разность двух таких чисел, в которых число восьмерок различается на 1, имеет вид 1880…0. Но $188=47\cdot4$, т.е. делится на 47, как и 2021. Поэтому, добавляя восьмерки по одной, мы будем получать числа, делящиеся на 47.

3. На продолжении отрезка CP за точку P отметим такую точку T, что $CP=PT$ (рис.19). Тогда

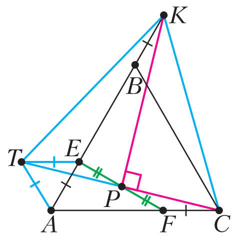


Рис. 19

$FCET$ – параллелограмм, откуда TE равно и параллельно FC. Но тогда треугольники TEK и KBC равны по первому признаку: тупые углы у них равны 120° и соответствующие стороны при этих углах равны. Следовательно, треугольник TKC равнобедренный и его медиана KP является высотой.

4. Всегда.

Выберем любого аборигена – будем называть его Петей – и покажем, как найти его возраст. Мысленно наденем на каждого второго аборигена шапку, начиная с Пети. Занумеруем аборигенов без шапок, идущих за Петей по часовой стрелке: 1, 2, …, 24, 25.

Заметим, что каждый абориген верно сообщает сумму возрастов своих соседей (если сложить названные аборигеном числа). Сложим числа, названные 1-м, 3-м, …, 25-м аборигенами без шапок, это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *плюс* возраст Пети. Сложим числа, названные 2-м, 4-м, …, 24-м аборигенами без шапок, это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *минус* возраст Пети. Вычтя из первой суммы вторую и поделив на 2, получим возраст Пети.

Зная возраст любого аборигена, легко узнать, кто его соседи, по их ответам.

5. а) 3 хода; б) 4 хода.

Вместо исходного прямоугольника M будем рассматривать прямоугольник N с вершинами в угловых лампочках.

Оценки. Заметим, что каждым ходом зажигается хотя бы одна из четырех угловых лампочек. Следовательно, ходов не больше 4. В п. а) заметим еще, что мы должны на каком-то ходу зажечь центральную лампочку. Вместе с ней по одну сторону от проведенной прямой окажется хотя бы две угловые лампочки (поскольку прямая, параллельная проведенной и проходящая через центр, делит квадрат N на две симметричные относительно центра части).

Примеры. а) Сначала зажигаем всё, кроме нижнего ряда лампочек, затем зажигаем все из оставшихся лампочек, кроме угловой, и наконец зажигаем угловую лампочку. (На рисунке 20 изображены два нижних слоя лампочек, стрелки указывают, по какую сторону от прямой зажигаются лампочки.)

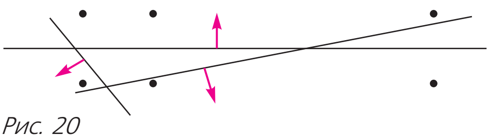


Рис. 20

б) Прямоугольник N имеет размеры 19×20. На его диагонали нет других лампочек, поскольку 19 и 20 взаимно просты. Проведем первую прямую параллельно диагонали, чуть ниже, чтобы эти две лампочки оказались над ней, а все остальные лампочки остались с той же стороны, что и до этого; зажжем все лампочки ниже этой прямой (рис.21; для примера мы взяли N размером 4×5 – поменьше, но тоже с взаимно простыми сторонами). Аналогично проведем вторую прямую параллельно диагонали, но чуть выше, и зажжем все лампочки выше этой прямой, как на рисунке. Оставшиеся две угловые лампочки можно зажечь за два хода, отсекая прямой от остальных.

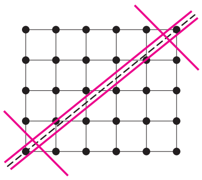


Рис. 21

10–11 классы

2. Существует.

Докажем, что подходит $n = 4$.

Первое решение. Заметим, что если мы зафиксируем положительное число k и рассмотрим все возможные пары положительных чисел a, b с суммой k, то множество значений выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ – это луч $\left[\frac{4}{k};+\infty\right)$ (проверьте это, записав сумму в виде $\frac{1}{a}+\frac{1}{k-a}=\frac{k}{a(k-a)}$).

Тогда для данных x и y выберем положительные суммы $a+b$ и $c+d$ так, что $a+b-c-d=x$ (сами числа a, b, c, d пока не фиксируем).

Поскольку выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, по сказанному выше, принимают все достаточно большие значения, можно подобрать положительные a, b, c, d так, чтобы разность этих выражений равнялась y.

Второе решение. Будем искать числа $a_1,\ldots,a_4$ как корни многочлена вида $P(t)=t^4-xt^3-zt^2-yt+1$ (согласно формулам Виета они удовлетворяют указанным равенствам). Поскольку $P(0)=1$, для того чтобы многочлен $P(t)$ имел четыре вещественных корня, достаточно, чтобы числа $P(1)=2-x-z-y$ и $P(-1)=2+x-z+y$ были отрицательны. Мы этого добьемся, взяв $z>|x+y|+2$.

Замечание. Можно доказать, что $n=1$, $n=2$ и $n=3$ не подходят.

3. Заметим, что MX и MY – средние линии треугольников CBE и BCD соответственно (рис.22). По условию

$$BD \cdot BA = BM^2 = CM^2 = CE \cdot CA,$$

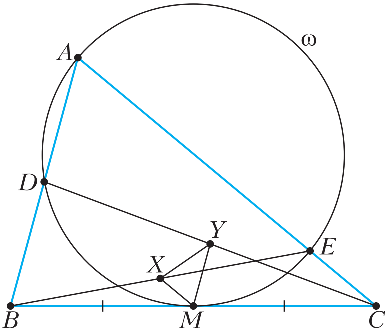


Рис. 22

откуда

$$MX : MY = CE : BD = BA : CA.$$

Поскольку $MX \parallel AC$ и $MY \parallel AB$, треугольники MXY и ABC подобны. Значит, $\angle MXY = \angle B = \angle YMC$. По теореме об угле между касательной и хордой сторона BC касается описанной окружности треугольника MXY, откуда следует утверждение задачи.

4. Докажем, что при $N = 3^{100}$ выиграет кот Матроскин. Для этого достаточно, чтобы на последнем шаге дяди Федора все оставшиеся 100 бутербродов оказались без колбасы.

Пронумеруем бутерброды по порядку. Стратегию кота Матроскина разделим на несколько стадий. Сначала покажем, что он может действовать так, чтобы к моменту, когда останется треть от исходного количества бутербродов, все бутерброды, номер которых дает остаток 1 при делении на 100, были без колбасы.

Отметим в каждой сотне бутербродов тот бутерброд, номер которого дает остаток 1 при делении на 100. Пусть за первые 3^{99} ходов кот Матроскин стянет колбасу с каждого отмеченного бутерброда среди центральной трети бутербродов. Так как дядя Федор за это время съедает $3^{99} \cdot 100$ бутербродов, никакие бутерброды среди центральной трети съедены не будут. Следующие 3^{99} ходов кот Матроскин будет забирать колбасу с произвольного отмеченного бутерброда, а если отмеченных бутербродов с колбасой не останется – ничего не делать. Так как за один ход дядя Федор съедает не более одного отмеченного бутерброда (см. замечание), то еще через 3^{99} ходов все оставшиеся отмеченные бутерброды будут без колбасы.

На следующей стадии своей стратегии кот Матроскин аналогичным образом добьется того, чтобы все бутерброды, номер которых дает остаток 2 при делении на 100, оказались без колбасы; при этом количество бутербродов снова уменьшится в 3 раза. На каждой следующей стадии он будет освобождать от колбасы очередной остаток от деления на 100; через сто стадий, когда останется ровно 100 бутербродов, они все будут без колбасы.

Замечание. Можно уточнить стратегию кота Матроскина, показав, что при $N = 2^{100}$ он тоже выигрывает. А вот при $N = 2^{100} - 1$ уже выигрывает дядя Федор.

6. Рассмотрим любое квадратное уравнение с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, имеющее два положительных корня, произведение которых равно 1. Подойдет, например, уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$, его корни – это $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$. Заметим, что сумма и произведение этих корней – целые, а тогда и сумма $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ – целая при любом натуральном n (это нетрудно доказать по индукции или просто раскрыв скобки: слагаемые с $\sqrt{3}$ либо входят в четной степени, либо взаимно уничтожаются).

Тогда $\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)^2$ – точный квадрат, и он равен $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + 2 + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}$ (так как произведение корней равно 1), т.е. отстоит на 2 от числа $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}$, которое, в свою очередь, есть верхняя целая часть числа $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n}$ (поскольку второй корень положителен и меньше 1).

Но тогда число $A = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$ – искомое.

Комментарий. Несложно видеть, что в качестве t можно взять любое число, являющееся бóльшим корнем многочлена вида $x^2 - mx + 1$, где m – натуральное число, не меньшее 3. Действительно, как и в решении выше, сумма корней $t^n + \frac{1}{t^n}$ этого многочлена оказывается целой, откуда для $A = t^2$ следует утверждение задачи.

В этом решении мы увидели, что для любого из взятых нами чисел t расстояние от t^n до ближайшего целого стремится к нулю с ростом n. На самом деле, чисел, степени которых становятся все ближе и ближе к целым числам, больше (но про остальные нельзя сказать, что они подходят для решения данной задачи!). Подробнее о них читайте в статье А.Егорова «Числа Пизо» («Квант», №5 и 6 за 2005 год); см. также проект «Дробные части степеней» на XII Летней конференции Турнира городов.

7. а) Пусть вертикальная прямая l проходит через центр сферы O. Пусть две параллельные горизонтальные плоскости высекают на сфере две равные (не большие!) окружности γ_+ и γ_-. Тогда существует большая окружность Ω_0, касающаяся γ_+ и γ_- в (диаметрально противоположных) точках P_0 и M_0 соответственно. Повернув Ω_0 на угол $\frac{2\pi k}{n}$ вокруг l, получим большую окружность Ω_k, также касающуюся двух окружностей в точках P_k и M_k соответственно.

Рассмотрим одну дугу P_0M_0 окружности Ω_0, а также дуги P_kM_k, полученные из нее поворотами. Все эти дуги не пересекаются, поскольку любая горизонтальная плоскость пересекает эти дуги в вершинах правильного n-угольника. Более того, каждую из этих дуг P_kM_k можно расширить до ближайших к ней (но не лежащих на ней) точек пересечения Ω_k с другими окружностями Ω_i. Заметим, что точки пересечения Ω_k и Ω_i лежат в (вертикальной) плоскости, симметрия относительно которой меняет эти окружности местами (эта плоскость содержит, например, биссектрису угла P_iOP_k). Отсюда легко видеть, что ближайшими к нашей дуге будут точки пересечения с Ω_{k-1} и с Ω_{k+1} и каждую дугу P_kM_k можно расширить до дуги между этими точками (не включающей концы).

Если теперь плоскости, высекающие γ_+ и γ_-, взять близкими к центру сферы, то точки пересечения Ω_k и Ω_{k-1} будут (из симметрии) близки к серединам дуг P_kP_{k-1} и M_kM_{k-1}. Поэтому длины полученных дуг можно сделать сколь угодно близкими к $\pi + \frac{2\pi}{n}$, что и требовалось.

б) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно не пересекающиеся дуги больших окружностей с длинами $\pi+\alpha_1$, $\pi+\alpha_2$, ..., $\pi+\alpha_n$ при положительных α_i; мы считаем, что они содержат свои концы. Мы докажем, что

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \le 2\pi,$$

откуда и следует требуемое.

В дальнейшем под *полюсом* полусферы мы понимаем точку этой полусферы, наиболее удаленную от ее границы.

Обозначим через B_i дугу большой окружности, дополнительную к A_i (ее длина равна $\pi-\alpha_i$). Рассмотрим все (открытые) полусферы, содержащие B_i; пусть X_i и Y_i – концы B_i (мы считаем, что они принадлежат B_i). Полусфера содержит B_i тогда и только тогда, когда она содержит X_i и Y_i, т.е. когда ее полюс лежит в открытых полусферах с полюсами X_i и Y_i. Значит, множество S_i полюсов таких полусфер – это пересечение этих двух полусфер, т.е. сферический «ломтик» раствора α_i; его площадь равна $2\alpha_i$.

Докажем теперь, что множества S_i попарно не пересекаются; поскольку площадь сферы равна 4π, отсюда вытекает требуемое неравенство. Предположим, что некоторая точка Z лежит в $S_1 \cap S_2$; тогда полусфера с полюсом Z содержит B_1 и B_2, а значит, дополнительная к ней (замкнутая) полусфера $\mathcal{H}$ пересекает A_1 и A_2 по целым полуокружностям (а не их частям). Но любые две такие полуокружности на полусфере $\mathcal{H}$ пересекаются (ибо концы любой – диаметрально противоположные точки на границе полусферы). Это противоречит нашему предположению.

Замечание. Для любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма которых меньше 2π, на сфере можно расположить попарно не пересекающиеся дуги длин $\pi+\alpha_i$ тем же методом, что и в решении пункта а).

Устный тур для 11 класса

1. Нет.

Положим $F(x)=f(x)+g(x)$, $G(x)=f(x)-g(x)$.

Тогда $f(x)=\frac{F(x)+G(x)}{2}$, $g(x)=\frac{F(x)-G(x)}{2}$.

Пусть F и G строго возрастают (соответственно, строго убывают). Тогда f как их полусумма строго возрастает (соответственно, строго убывает), что противоречит условию. Если же какая-то из функций F и G строго возрастает, а другая строго убывает, то функции F и $-G$ строго возрастают или строго убывают обе. Следовательно, их полусумма g строго монотонна – снова противоречие с условием.

2. Вася.

Пусть O – вершина пирамиды, $A_1A_2\ldots A_N$ – ее основание. Разобьем все ребра пирамиды на пары смежных, одно из которых боковое, а другое лежит в основании: (OA_1, A_1A_2), (OA_2, A_2A_3), ..., (OA_N, A_NA_1). На каждый ход Пети Вася может отвечать в ту же пару, т.е. красить в зеленый цвет ребро из той пары, в которой Петя только что покрасил второе ребро в красный. Если Петя покрасит хотя бы одно ребро в основании пирамиды, то в ответ Вася покрасит боковое ребро из той же пары, пусть это, например, ребро OA_N. Так как в конце игры вершина A_{N-1} соединена зеленым ребром либо с O, либо с A_N, то из нее можно дойти по зеленым ребрам до O. Далее, вершина A_{N-2} соединена либо с O, либо с A_{N-1}, из которой есть путь по зеленым ребрам до O. Следовательно, и из вершины A_{N-2} можно добраться до O по зеленым ребрам. Продолжая эти рассуждения, получим, что из всех вершин можно дойти по зеленым ребрам до вершины O, а это значит, что Вася победил. Таким образом, чтобы не проиграть, Петя должен красить только боковые ребра. После его предпоследнего хода неокрашенными останутся ребро из пары, в которую он только что сходил, и два ребра еще из одной пары. Тогда в ответ Вася может покрасить в зеленый цвет последнее неокрашенное боковое ребро, после чего они покрасят еще по одному ребру в основании. В итоге зеленым цветом будут покрашены все ребра в основании пирамиды, кроме одного, а также одно боковое ребро, поэтому каждые две вершины будут соединены путем из зеленых ребер. Значит, и в этом случае Вася победит.

3. Случай $AB = BC$ очевиден. Иначе, основания F и E высот AF и CE лежат на биссектрисе BI по разные стороны от AC, прямые AP и CQ параллельны и $\angle PAT = \angle FAT = \angle ECT = \angle QCT$ (рис.23). Задача будет решена, если мы докажем подобие треугольников TAP и TCQ (тогда

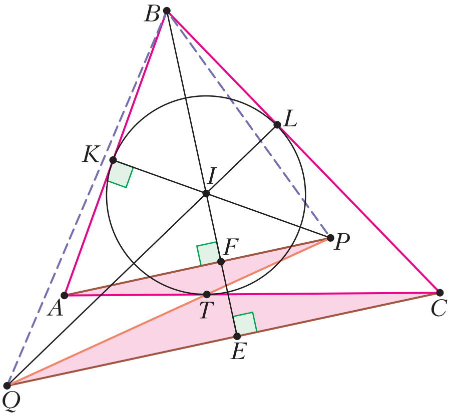


Рис. 23

равные углы CTQ и ATP вертикальны и точки P, Q, T лежат на одной прямой). Для этого достаточно проверить, что $AT/AP = CT/CQ$. Пусть K и L – точки касания окружности со сторонами AB и BC соответственно. Тогда $AT = AK$ и $CT = CL$, и осталось доказать равенство $AK/AP = CL/CQ$. Оно следует из подобия треугольников APK и CQL: они прямоугольные, а поскольку BI – биссектриса угла B, углы BAP и BCQ равны.

5. 47.

Оценка сверху. Выберем 47 человек и каждого спросим «Кто из жителей преступники?» Если кто-то назвал не 35 человек, то он – преступник. Пусть каждый назвал свое 35-элементное подмножество преступников. Заметим, что среди 47 опрошенных не менее 12 свидетелей, поэтому они назовут одно и то же 35-элементное подмножество. Назовем 35-элементное подмножество *потенциально преступным*, если его назвали не менее 12 из 47 человек. Одно из этих подмножеств в самом деле совпадает с множеством преступников. Но среди всех 50 человек есть человек A, входящий во все потенциально преступные подмножества: действительно, таких подмножеств всего не более 3 (иначе опрошенных было бы не менее $4 \cdot 12 = 48$), и поэтому 15-элементные дополнения к потенциально преступным подмножествам накрывают не более 45 опрошенных. Значит, A – точно преступник.

Оценка снизу. Пусть мы опросили $k < 47$ людей. Опросим еще $46 - k$ случайных людей из оставшихся. Разобьем 46 опрошенных людей на 4 группы по 11, 11, 11, 13 человек. Пусть группы, где 11 человек, будут отвечать на вопросы так, будто свидетели они и 4 неопрошенных человека, а группа из 13 человек будет отвечать на вопросы так, будто свидетели они и 2 любых неопрошенных. Так как мы не можем понять, какая из версий настоящая, то и преступника мы найти не сможем, ведь любой человек в какой-то из версий свидетель.

Комментарий. Попробуйте решить также задачу, когда людей опрашивают последовательно (можно выбирать очередного опрашиваемого, учитывая ответы предыдущих опрошенных).

6. Существует.

Будем называть точку с рациональными координатами рациональной. Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$. Докажем, что на ней существует сколь угодно много рациональных точек. Рассмотрим прямую вида $y = kx + 1$ с рациональным k. Она проходит через точку $(0; 1)$ окружности, и вторая точка пересечения с окружностью тоже будет рациональной (поскольку квадратное уравнение $x^2 + (kx+1)^2 = 1$ с рациональными коэффициентами имеет рациональный корень 0, второй корень также рационален).

Выбирая разные рациональные k, отметим на окружности 2021 рациональную точку, включая точки $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(0; -1)$. Через каждую из этих 2021 точек проведем касательную к окружности и отметим точки пересечения соседних касательных, получим описанный 2021-угольник (строго это можно обосновать, например, так: сначала получим описанный квадрат, проведя касательные в четырех указанных точках, а затем по очереди проведем остальные касательные; каждая будет отсекать от уже имеющегося многоугольника треугольник, примыкающий к вершине).

Заметим, что уравнения касательных имеют рациональные координаты (поскольку касательные перпендикулярны прямым, соединяющим начало координат с рациональными точками касания). Точка пересечения прямых с рациональными координатами рациональна (как единственное решение системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами). Значит, вершины нашего 2021-угольника рациональны. Приведем координаты вершин к общему знаменателю N и рассмотрим гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом N. Она переведет наш 2021-угольник в удовлетворяющий условию задачи.

Олимпиада «Ломоносов»

(см. «Квант» №4)

Физика

Отборочный этап

7–9 классы

1. Уравнение движения бруска по горизонтали имеет вид $ma = F\cos\alpha - F_{\text{тр}}$, где $F_{\text{тр}} = \mu N$ – модуль силы трения скольжения, $N = mg - F\sin\alpha$ – модуль силы нормального давления бруска на стол. Отсюда ускорение бруска $a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g$. За время t брусок переместится на расстояние

$$L = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{2m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \frac{\mu g t^2}{2}.$$

2. Разобьем траекторию санок на три участка, каждый из которых представляет собой наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α_i, имеющую перепад высот h_i и длину основания l_i (рис.24; $i = 1, 2, 3$). Поскольку санки перемещаются медленно, их ускорение равно нулю. Поэтому в проекциях на оси x и y уравнения движения санок на каждом участке имеют такой вид: $0 = mg\sin\alpha_i + F_{\text{тр}\,i} - F_i$, $0 = N_i - mg\cos\alpha_i$. Поскольку $F_{\text{тр}\,i} = \mu N_i$, то $F_i = mg\sin\alpha_i + \mu mg\cos\alpha_i$, а работа на участке траектории длиной s_i равна $A_i = (mg\sin\alpha_i + \mu mg\cos\alpha_i)s_i = mg(h_i + \mu l_i)$. Суммируя работы на всех участках, вычислим работу по подъему тела на горку:

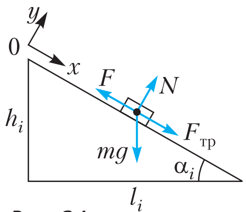


Рис. 24

$$A = mg\sum_{i=1}^{3}(h_i + \mu l_i) = mg(h + \mu l).$$

Отсюда находим коэффициент трения:

$$\mu = \frac{A - mgh}{mgl}.$$

3. До охлаждения масса водяных паров в банке была $m_{\text{к}} = \varphi_1\rho_{\text{к}}V$, где $\varphi_1 = \varphi/100\%$. После охлаждения масса насыщенного пара в банке будет $m_{\text{х}} = \rho_{\text{х}}V$. Поэтому масса образовавшегося в банке льда равна $m = m_{\text{к}} - m_{\text{х}} = \left(\rho_{\text{к}}\frac{\varphi}{100\%} - \rho_{\text{х}}\right)V$.

4. Справедлива следующая система уравнений: $I_1 = I_2 + I_3$, $U_2 = I_2R_2$, $U_2 = I_3R_3$, $R_3 = nR_2$. Решая ее относительно R_3, получаем $R_3 = (n+1)\frac{U_2}{I_1}$.

5. Из формулы для тонкой собирающей линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ получаем, что расстояние от линзы до стенки $b = \frac{aF}{a-F}$. Из подобия треугольников (рис.25) находим модуль скорости изображения

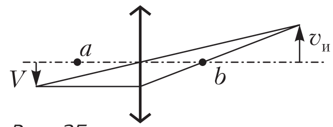


Рис. 25

паука относительно стенки: $v_{\text{и}} = V\frac{b}{a} = \frac{VF}{a-F}$. Следовательно, модуль искомой скорости равен $v = V + v_{\text{и}} = \frac{aV}{a-F}$.

10–11 классы

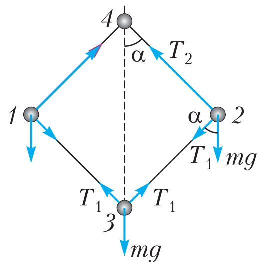


Рис. 26

1. На рисунке 26 показаны силы, действующие на грузы *2* и *3*. Из рисунка следует, что проекции уравнения движения грузов *2* и *3* на вертикальную ось и проекция уравнения движения груза *2* на горизонтальную ось имеют вид

$$T_2\cos\alpha = T_1\cos\alpha + mg,$$

$$2T_1\cos\alpha = mg,$$

$$\frac{mv^2}{l\sin\alpha} = T_2\sin\alpha + T_1\sin\alpha,$$

где v – линейная скорость груза *2*. Из записанных уравнений находим $v^2 = 2gl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Следовательно, приращение кинетической энергии системы $\Delta E_{\text{к}} = 2\frac{mv^2}{2} = 2mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Приращение потенциальной энергии системы $\Delta E_{\text{п}} = 2mgl(1-\cos\alpha) + mg\cdot 2l(1-\cos\alpha)$. По закону изменения механической энергии искомая работа

$$A = \Delta E_{\text{к}} + \Delta E_{\text{п}} = 2mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 4mgl(1-\cos\alpha).$$

2. Пусть растяжения пружин в положении равновесия равны l_1, l_2 и l_3 соответственно. Тогда сила натяжения первой пружины и нити, прикрепленной к грузу, равна $F_1 = k_1 l_1$, а сила натяжения нити, переброшенной через блок, равна $F_2 = k_2 l_2 = k_3 l_3$, так как блок гладкий. Из условия невесомости блока следует $F_1 = 2F_2$, а потому $l_2 = \frac{k_1}{2k_2} l_1$ и $l_3 = \frac{k_1}{2k_3} l_1$. При смещении груза вправо на расстояние Δx первая пружина сократится на Δx, а вторая и третья удлинятся на Δx_2 и Δx_3 соответственно, причем $\Delta x_2 + \Delta x_3 = 2\Delta x$ (так как нити нерастяжимы) и $k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3$ (пружины невесомы). Отсюда находим $\Delta x_2 = \frac{2k_3}{k_2 + k_3}\Delta x$, $\Delta x_3 = \frac{2k_2}{k_2 + k_3}\Delta x$. Изменение потенциальной системы при этом будет

$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{1}{2}\Big(k_1 (l_1 - \Delta x)^2 + k_2 (l_2 + \Delta x_2)^2 + k_3 (l_3 + \Delta x_3)^2 - k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2 - k_3 l_3^2\Big) = \frac{1}{2}\left(k_1 + \frac{4k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)\Delta x^2.$$

Обозначив через v_0 скорость груза в положении равновесия, по закону сохранения механической энергии имеем $\Delta E_{\text{п}} = \frac{mv_0^2}{2}$. Поскольку амплитудное значение скорости v_0 связано с амплитудой смещения Δx соотношением $v_0 = \omega \Delta x$, частота

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(k_1 + \frac{4k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)}.$$

3. Плотность жидкого пропана в баллоне $\rho = \frac{m_0}{V_0}$, давление в баллоне p. По условию в баллоне осталось $m = (1 - \alpha_1) m_0$ пропана, где $\alpha_1 = \alpha/100\%$. Пусть часть пропана, которая находится в газообразном состоянии, занимает объем V. Тогда $m_1 = \frac{\text{M}pV}{RT}$ и $(1 - \alpha_1) m_0 = \rho (V_0 - V) + \frac{\text{M}pV}{RT}$. Отсюда $V = \frac{\alpha_1 m_0 V_0 RT}{m_0 RT - \text{M}pV_0}$, и $m_1 = \frac{\alpha m_0 V_0 \text{M}p}{(m_0 RT - \text{M}pV_0)\cdot 100\%}$.

4. Потенциальная энергия притяжения зарядов в исходном положении равна $W_0 = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 l}$. Когда вторую частицу переместили первый раз, потенциальная энергия стала $W_1 = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon\sqrt{l^2 + l_1^2}}$. При этом была совершена работа $A_1 = W_1 - W_0$. Потенциальная энергия системы при конечном положении второй частицы $W_2 = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l + l_2)^2 + l_1^2}}$. Совершенная при таком перемещении работа $A_2 = W_2 - W_1$. Окончательно получаем

$$A_2 = \frac{A_1 l}{\sqrt{l^2 + l_1^2} - l}\left(1 - \frac{\sqrt{l^2 + l_1^2}}{\sqrt{(l + l_2)^2 + l_1^2}}\right).$$

5. На рисунке 27 показан ход лучей, дающих изображение C глаза человека A в зеркале. Луч

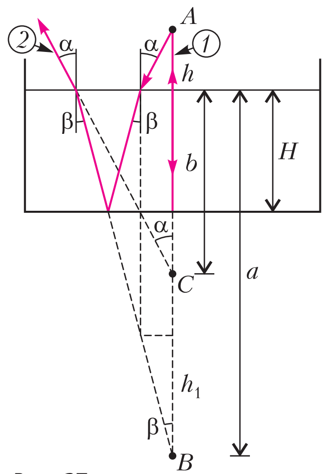


Рис. 27

1 идет от глаза по нормали к зеркалу и после отражения от него возвращается в глаз по тому же пути. Луч *2* идет от глаза под углом α к нормали к поверхности воды и после отражения от зеркала и повторного прохождения сквозь воду также попадает в глаз человека. Продолжения лучей *1* и *2* пересекаются в точке C, являющейся искомым изображением глаза. Согласно закону преломления, $\sin\alpha = n\sin\beta$. Поскольку диаметр зрачка человеческого глаза составляет несколько миллиметров, в глаз попадут только те лучи, которые идут под малыми углами к вертикали, т.е. справедливо приближенное равенство $\alpha = n\beta$. Поэтому $\frac{h_1}{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = n$ и $a = 2H + h_1 = 2H + nh$. Из рисунка видно, что $l = h + b$. Поскольку $\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}$, то $b = \frac{2H + nh}{n}$. Следовательно, $H = \frac{(l - 2h)n}{2}$.

Заключительный этап

7–9 классы

1. Используя закон Гука, запишем силы натяжения пружин в виде $F_1 = k_1 \Delta l_1$, $F_2 = k_2 \Delta l_2$, $F_3 = k_3 \Delta l_3$, где Δl_1, Δl_2 и Δl_3 – удлинения пружин. Условия равновесия пружин представим в виде $F = F_1$, $F_1 = F_2$ и $F = F_3$. Удлинение составной пружины равно $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, или $\Delta l = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)F$. Отсюда находим

$$k_3 = \frac{Fk_1k_2}{\Delta l k_1 k_2 - F(k_1 + k_2)}.$$

2. Уравнение теплового баланса имеет вид $(t_1 - t)cm_1 + (t_2 - t)cm_2 = 0$, где c – удельная теплоемкость воды, m_1 – масса горячей, а m_2 – масса холодной воды, причем $m_1 + m_2 = m$. Отсюда находим

$$m_1 = \frac{m(t - t_2)}{t_1 - t_2},\ m_2 = m - m_1 = \frac{m(t_1 - t)}{t_1 - t_2}.$$

3. При постоянной скорости вращения ротора двигателя протекание тока по его обмотке сопровождается только выделением тепла в ней и совершением двигателем механической работы. Потребляемая двигателем мощность равна UI, где I – сила тока, текущего по обмотке. Мощность тепловых потерь равна RI^2. Поэтому развиваемая двигателем механическая мощность N удовлетворяет соотношению $UI = N + RI^2$. Так как N зависит от силы тока по квадратичному закону: $N = UI - RI^2$, максимум этого выражения достигается при значении силы тока, лежащем в середине интервала $\left[0; \frac{U}{R}\right]$ и равном $I_0 = \frac{U}{2R}$. Следовательно, максимальная мощность $N_{\max} = U\frac{U}{2R} - R\left(\frac{U}{2R}\right)^2 = \frac{U^2}{4R}$. При постоянной скорости движения поднимаемого двигателем груза натяжение нити равно mg. Приравнивая максимальную мощность двигателя мощности силы натяжения mgv, получаем $v_{\max} = \frac{U^2}{4mgR}$.

4. Из условия задачи следует, что экран находится ближе к проектору, чем четкое изображение диапозитива, иначе после установки добавочной линзы размер изображения точки увеличился бы. Ход лучей для первого и второго случаев, указанных в условии, изображен на рисунке 28, где D – оптическая сила объектива,

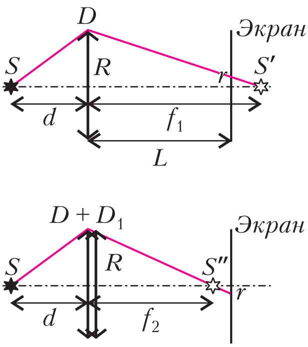


Рис. 28

$D_1 = 1/F_1$ – оптическая сила добавочной линзы, d – расстояние от диапозитива до объектива, f_1 и f_2 – расстояния от объектива до изображения, L – расстояние от объектива до экрана, R – радиус линзы и r – радиус пятна на экране. Из рисунка видно, что $\frac{r}{R} = \frac{f_1 - L}{f_1} = \frac{L - f_2}{f_2}$. Отсюда $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{2}{L}$. Формула тонкой линзы, примененная для обоих случаев, дает $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = D$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = D + D_1$. Сложив эти равенства, получаем $\frac{2}{d} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 2D + D_1$, или $2\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{L}\right) = 2D + D_1$. Изображение диапозитива на экране будет резким, если выполняется равенство $\frac{1}{d} + \frac{1}{L} = D + D_x$. Сопоставив последние два выражения, получаем

$$D_x = \frac{D_1}{2} = \frac{1}{2F_1}.$$

10–11 классы

1. Брусок и клин движутся под действием сил, изображенных на рисунке 29. В частности, к

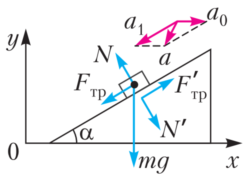


Рис. 29

бруску приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции клина $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. В свою очередь, брусок действует на клин с силами $\vec{N'}$ и $\vec{F}'_{тр}$, причем $N' = N$, $F'_{тр} = F_{тр}$. Обозначим через $\vec{a}$ ускорение бруска в неподвижной системе отсчета. В соответствии с законом сложения ускорений, $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$, где $\vec{a}_0$ – ускорение клина, $\vec{a}_1$ – ускорение бруска относительно клина. Применяя к бруску второй закон Ньютона, имеем в проекциях на оси координат $m(a_0 - a_1\cos\alpha) = -N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha$, $-ma_1\sin\alpha = -mg + N\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha$. Уравнение движения клина в проекциях на горизонтальную ось имеет вид $Ma_0 = N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha$. Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, окончательно получаем

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{1 + m\left(\sin^2\alpha + \mu\sin\alpha\cos\alpha\right)/M}.$$

Модуль суммарной работы сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}'_{тр}$ равен произведению модуля силы трения скольжения на модуль перемещения бруска относительно клина: $|A_{тр}| = \mu Nh/\sin\alpha$. По закону сохранения энергии эта работа равна количеству теплоты, выделившемуся при скольжении бруска по клину:

$$Q = \frac{\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1 + m\left(\sin^2\alpha + \mu\sin\alpha\cos\alpha\right)/M}.$$

2. Катушка находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых показаны на рисунке 30. Поскольку ускорение катушки должно оставаться равным нулю, сумма моментов и сумма действующих на катушку сил должны быть равны нулю. По закону сухого трения, $F_{тр1} = \mu N_1$, $F_{тр2} = \mu N_2$. Имеем следующую систему уравнений: $N_1 - \mu N_2 - F = 0$, $Mg - N_2 - \mu N_1 = 0$, $FR = 2\mu R(N_1 + N_2)$. Отсюда получаем

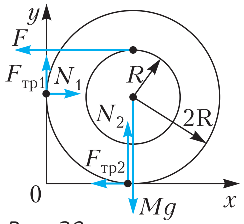


Рис. 30

$$F = \frac{2Mg\mu(1+\mu)}{1 - 2\mu + 3\mu^2}.$$

3. Среднеквадратичная скорость молекул газа определяется выражением $v = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_0 – масса молекулы. Следовательно, искомое отношение равно $\alpha = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$, где T_2 и T_1 – температуры газа в конечном и начальном состояниях. Из уравнения начального состояния газа, $\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)hS = \nu RT_1$. При нагреве газ совершает изобарное расширение, поэтому $\Delta Q = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1)$. Отсюда находим

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2\Delta Q}{5(p_0S + Mg)h}}.$$

4. Зависимость давления от объема в процессе *1–2* описывается линейной функцией вида $p(V) = b - kV$. По условию $p(V_0) = 3p_0$, $p(3V_0) = p_0$, или $3p_0 = b - kV_0$, $p_0 = b - 3kV_0$. Из этой системы находим, что $b = 4V_0$, $k = \frac{p_0}{V_0}$. Следовательно, $p = 4p_0 - \frac{p_0}{V_0}V$. Для аргона, который можно считать одноатомным идеальным газом, $U = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}\left(4p_0V - \frac{p_0}{V_0}V^2\right)$. График зависимости $U(V)$ изображен на рисунке 31, причем он

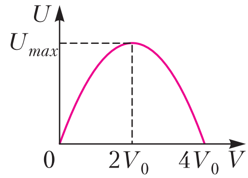


Рис. 31

пересекает ось абсцисс в точках $V = 0$ и $V = 4V_0$. Поэтому максимум внутренней энергии достигается при объеме аргона $V = 2V_0$ и равен $U_{\max} = 6p_0V_0$.

5. До нейтрализации заряда кольца пружина растянута под действием силы тяжести mg и силы электростатического притяжения со стороны равномерно заряженного кольца

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2h}{\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2}.$$

После нейтрализации заряда кольца положение равновесия бусинки скачком изменится на новое, находящееся на расстоянии $\Delta x = \frac{F}{k}$ от первоначального. В результате возникнут гармонические колебания бусинки с амплитудой $A = \Delta x$ и циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Максимальное (амплитудное) значение скорости движения бусинки будет равно при этом

$$v_{\max} = A\omega_0 = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{kR^2}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

6. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания, в процессе которых происходит периодическая перезарядка конденсаторов. В каждый момент времени суммарное напряжение на конденсаторах равно напряжению на катушке, которое, в свою очередь, опережает по фазе ток в цепи на $\pi/2$. В момент достижения максимального напряжения на конденсаторах ток в цепи обратится в ноль, следовательно, вся энергия будет сосредоточена в конденсаторах. При этом на конденсатор C_2 перетечет из конденсатора C_1 некоторый заряд q, а на конденсаторе C_1 останется заряд $C_1U_1 - q$. Величину заряда q на конденсаторе C_2 можно найти из закона сохранения энергии в контуре

$$\frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{(C_1U_1 - q)^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}.$$

Учитывая, что $U_2 = \frac{q}{C_2}$, получаем

$$U_{2\max} = \frac{2U_1C_1}{C_1 + C_2},$$

откуда

$$U_1 = \frac{(C_1 + C_2)U_{2\max}}{2C_1}.$$

7. Каждый из лучей света, падающих на призму, преломляется дважды: на передней и задней ее гранях (рис.32). Закон преломления на этих

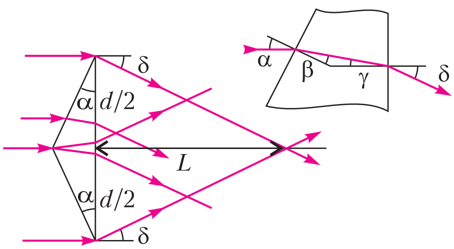


Рис. 32

гранях, записанный с учетом малости углов падения и преломления, дает следующие соотношения: $\beta = \frac{\alpha}{n}$, $\delta = n\gamma$. Поскольку $\gamma = \alpha - \beta$, для угла преломления δ получаем $\delta = \alpha(n-1)$. Из рисунка видно, что пучки света, преломленные призмой, перестанут перекрываться на расстоянии

$$L = \frac{d}{2\operatorname{tg}\delta} = \frac{d}{2\delta} = \frac{d}{2\alpha(n-1)}.$$

8. Построение изображений предмета при двух его положениях показано на рисунке 33. Из

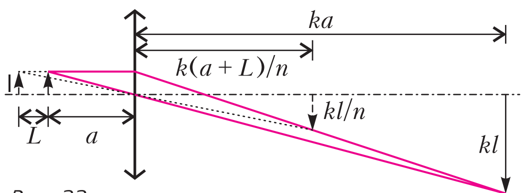


Рис. 33

формулы тонкой линзы следуют равенства

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ka} = \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{a+L} + \frac{n}{k(a+L)} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда находим

$$F = \frac{kL}{n-1}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 211581

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40

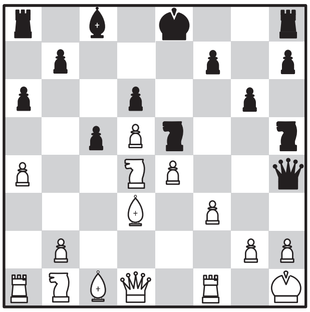
ПсихологиЯ РЕШАЕТ

Прошедший турнир претендентов в очередной раз показал, что в профессиональном спорте помимо непосредственно силы игры и физической формы важнейшее значение имеет психологическая подготовка.

Ян Непомнящий, уже в статусе победителя, вероятно, не смог должным образом настроиться на партию последнего тура и уступил Дину Лижэню, который стал победителем второго круга.

Дин Лижэнь – Я.Непомнящий
Екатеринбург, 2021

1. d4 ♞f6 2. c4 g6 3. f3 e6 4. e4 c5 5. d5 d6 6. ♗d3 ♝g7 7. ♘e2 ed 8. cd ♞bd7 9. ♘ec3 a6 10. a4 ♞h5 11. 0-0 ♝d4+ 12. ♔h1 ♞e5 (угрожая 13…♛h4 14. ♘e2 ♝f2 с немедленным выигрышем) **13. ♘e2 ♛h4 14. ♘d4.** Ключевой момент в партии – черные должны решиться на 14…cd! 15. ♔g1 g5! со стратегически сомнительной для гроссмейстеров топ-уровня позицией, но реальными шансами на результативную атаку на королевском фланге.

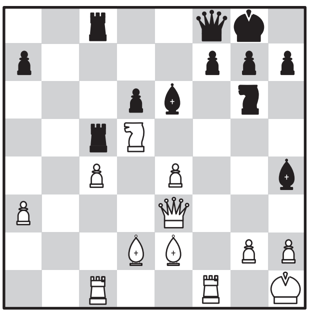


14…♞d3? 15. ♕d3 ♞g3+ 16. ♔g1 ♞f1 17. ♘c2! Вероятно, этот ход черные просмотрели. Черный конь практически пойман, а белый – вне опасности. **17…♞h2 18. ♕e3 0-0 19. ♕g5 ♞f3+ 20. gf ♛h3 21. ♗f4! ♛f3 22. ♘d2!** Точной игрой белые отбили атаку, и налицо преимущество двух фигур перед ладьей. **22…f6 23. ♕g6+ hg 24. ♘f3 ♝g4 25. ♘d2 ♝e2 26. ♔f2 ♝d3 27. ♘e1 c4 28. ♗d6 ♜fe8 29. ♘d3 cd.** С мини-ловушкой: в случае 30. ♔e3? белые теряют пешку на d5 после ♖ad8. **30. ♗c7 ♚f7 31. ♖a3 ♜ac8 32. d6 ♚e6 33. ♖d3 ♚d7 34. ♘c4 ♜c7 35. ♘b6+**, и **черные сдались.**

Интересное положение сложилось перед партией 12 тура между Фабиано Каруаной и Анишем Гири – обоим гроссмейстерам для продолжения борьбы за первое место была нужна только победа, и в битве нервов крепче оказался Гири.

Ф.Каруана – А.Гири
Екатеринбург, 2021

1. e4 c5 2. ♘f3 e6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♞f6 5. ♘c3 ♞c6 6. a3 ♝e7 7. ♗e3 0-0 8. ♗e2 d6 9. ♕d3 ♝d7 10. f4 e5. Белые сделали в дебюте редкий ход a3, а черные избрали систему, не связанную с продвижением b5, лишая ход белых смысла. Поэтому по итогам дебюта равенство. **11. ♘c6 bc 12. 0-0 ef 13. ♗f4 ♝e6 14. ♕g3 ♞d7 15. ♖ad1 ♜e8 16. ♔h1 ♛b8 17. b4 ♞e5 18. b5 ♜c8 19. bc ♜c6 20. ♘d5 ♛f8.** Черные играют точно, и за белых не видно ничего лучше, чем 21. c4 ♞c4 22. ♗c4 ♜c4 23. ♘e7 ♛e7 24. ♗d6 с упрощениями и вероятной ничьей. **21. c3 ♜ac8 22. ♖c1?!** Не желая мириться с ничьей, белые делают два пассивных хода подряд, и инициатива переходит к черным. **22…♞g6 23. ♗d2 ♝h4 24. ♕e3 ♜c5 25. c4.**



25…h6! 26. ♕b3 ♝g5! 27. ♗g5 hg. При пешках, фиксированных на белых полях, конь явно сильнее слона. **28. ♕g3 ♛d8 29. ♖cd1 ♝d5 30. ed ♞f4 31. ♕f2 ♜8c7 32. ♖d4 ♛e8 33. ♗f3 ♜c4 34. ♖c4 ♜c4 35. ♕a7 ♜a4 36. ♕f2?!** Слишком пассивно. Спасало 36. ♕c7! ♜a3 37. h4! (нельзя сразу 37. ♕d6? из-за мата после 37…♜f3! 38. gf ♛e2) 37…gh 38. ♕d6. **36…♜a3.** Теперь у черных лишняя пешка в лучшей позиции, и они спокойно доводят партию до победы. **37. h4 ♛e5 38. hg ♛g5 39. ♖e1 ♜a8 40. ♗e4 ♜a2 41. ♖b1 ♜a8 42. ♖e1 f5 43. ♗b1 ♚f7 44. ♖e3 ♜h8+ 45. ♔g1 ♞g2,** и **белые сдались.**

Однако эта победа в итоге не помогла Анишу Гири, так как в предпоследнем туре он уступил Александру Грищуку, а в последнем туре – Кириллу Алексеенко.

А.Гири – К.Алексеенко
Екатеринбург, 2021

1. c4 ♞f6 2. g3 e6 3. ♗g2 d5 4. d4 ♝b4+ 5. ♘d2 0-0 6. ♘gf3 b6 7. 0-0 ♝b7 8. b3 ♜e8 9. ♗b2 ♞bd7 10. ♕c2 (перспективнее схема развития с ♖c1, e3 и ♕e2) **♜c8 11. ♖ad1 c5 12. ♕b1 ♛e7 13. dc ♞c5 14. cd ♝d5 15. ♘e5 ♝g2 16. ♔g2 ♛b7+ 17. ♔g1 b5 18. ♘ef3 ♜ed8 19. a3 ♝d2 20. ♗f6?!** Неудачное решение – у белых недостаточно ресурсов, чтобы использовать сдвоенные пешки. **20…gf 21. ♘d2 ♚g7 22. ♘f3** (белым стоило самим занять активную позицию в центре – 22. b4 ♞a4 23. ♘e4) **♞e4 23. ♖d8 ♜d8 24. ♕b2 a5 25. b4 a4 26. ♖c1 ♛d5 27. ♕c2 ♜d7 28. ♔g2?!** (гораздо активнее 28. ♕c8! ♜d8 29. ♕c7) **♛b7 29. ♔g1 ♜d8 30. ♔g2 ♜d7 31. ♔g1 ♜d6 32. ♔g2 ♞d2.** Черные справедливо отказались от повторения ходов и впоследствии воспользовались пассивностью белых фигур и слабостью пешек ферзевого фланга. **33. ♖d1 ♞c4 34. ♖d6 ♞d6 35. ♕d3 ♞c4 36. e4 ♛c6 37. g4 ♛c7 38. ♘d2 ♞e5 39. ♕e3 h6 40. f4 ♞g4 41. ♕g3 f5 42. ♔f1 h5 43. ♔e2 ♛b6 44. h3 h4 45. ♕c3+ ♞f6 46. ef ef 47. ♘f3 ♛e6+ 48. ♔d2 ♛d5+ 49. ♕d3 ♞e4+ 50. ♔e3 ♛a2 51. ♔d4 f6 52. ♕f1 ♛a3 53. ♔d5 ♛b4 54. ♕g1+ ♚f8 55. ♔e6 ♛e7+ 56. ♔f5 ♞g3+**, **и белые сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964

ISSN 0130-2221 21005
9 770130 222214